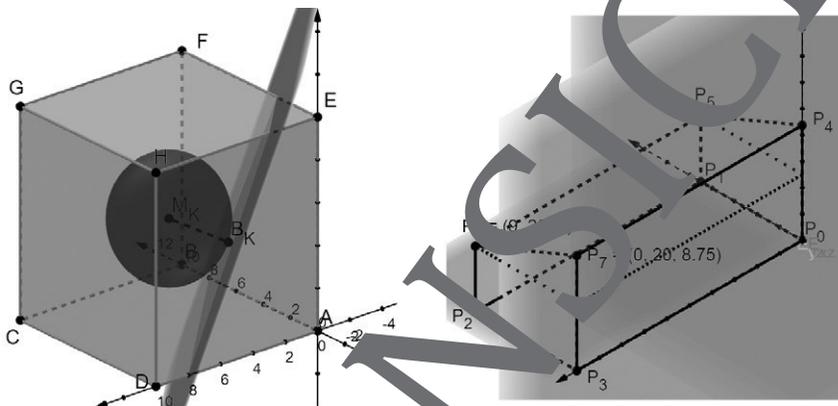


Kugeln und berührende Flächen – eine Anwendung des Normalenvektors

Günther Weber



© Günther Weber

Dieses Material bietet Ihnen drei Aufgaben aus dem Bereich der Analytischen Geometrie an, bei denen Kugeln und die Kugelberührende Ebenen im Mittelpunkt stehen. Da der Kugelradius senkrecht auf der berührenden Ebene (Tangentialebene) im Berührungspunkt B auf dem Radius steht, spielt der Normalenvektor bei der Lösung der Aufgaben eine entscheidende Rolle.

Kugeln und berührende Flächen – eine Anwendung des Normalenvektors

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	3
Lösungen	9

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der Analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Sie bestimmen Mittelpunkte und Radien von Kugeln, jeweils den Berührungspunkt von Kugel und Ebene sowie die Gleichungen der berührenden Ebenen.

VORANSICHT

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt

Info Informationsblatt

 einfaches Niveau

 mittleres Niveau

 schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Hessesche Normalenform der Ebenengleichung und Kugelgleichung	M1	Info
Hängende Kugel im Würfel und berührende Ebenen	M2	Ab
Kugelförmiger Behälter auf dem Dachboden	M3	Ab
Kugel und schiefe Ebene	M4	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kugel, Tangentialebene, Normalenvektor, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform, Hessesche Normalenform), Geradengleichung (Zwei-Punkte-Form, Punkt-Richtungs-Form), winkelhalbierende Ebene, Winkel zwischen zwei Ebenen, Schnittpunkt mit Ebenen, Abstand von Punkten, Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck, Satz des Pythagoras, Würfel, Kegel (Volumen, Oberfläche)

Medien: GeoGebra, CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die (Hessesche) Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen durchführen sowie das Volumen von Pyramiden und Kegel ermitteln. Die Kugelgleichung muss nicht bekannt sein.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47441_P_G03_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 13.12.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch an und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

In einigen Bundesländern finden sich auch Kompetenzerwartungen, die direkt Kugeln und Ebenen betreffen, z.B. in Hessen:

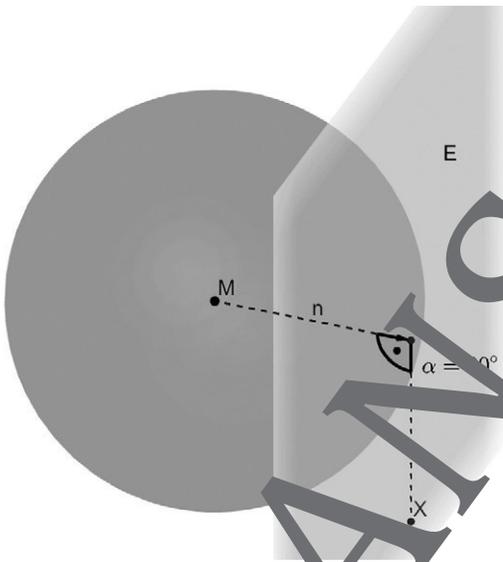
<https://kultusministerium.hessen.de/sites/kultusministerium.hessen.de/files/2021-07/kc9-fm.pdf> (aufgerufen am 13.12.2022)

- Darstellen von Kugeln mit Vektor- und Koordinatengleichungen.
- Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen Kugeln und Geraden sowie zwischen zwei Kugeln, beschreiben realer Objekte mittels Kugeln.
- Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen Kugeln und Ebenen.
- Bestimmen der Schnittmengen zwischen Kugeln und Ebenen.

Tangentialebene (berührende Ebene)

Berührt eine Kugel k eine Ebene E in einem Punkt B , so steht der Vektor \overline{MB} senkrecht auf der Ebene und ist somit ein Normalenvektor der Ebene.

In der nebenstehenden Abbildung ist die Tangentialebene E an die Kugel k zu sehen. Vektor \overline{MB} steht senkrecht auf der Ebene E .



Grafik: Günther Weber

Sie wollen mehr für Ihr Fach?

Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download
im RAABE Webshop.



Über 5.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Webinare und Videos
für Ihre fachliche und
persönliche Weiterbildung



Attraktive Vergünstigungen
für Referendar:innen mit
bis zu 15% Rabatt



Käuferschutz
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de