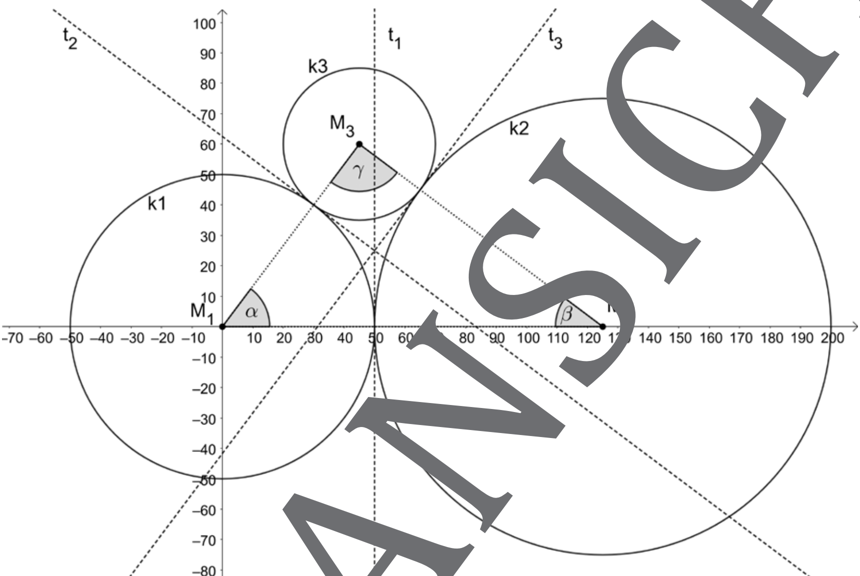
Kreise: Geometrie in der Ebene

Alfred Müller



In zwei Aufgabenblättern beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit einer Reihe von Aufgaben zum Thema Kreise. Anhand der Gleichungen bestimmen sie Mittelpunkte und Radien, berechnen Schnittpunkte und stellen Tangentengleichungen auf. Auch das Aufstellen von Kreisgleichungen anhand gegebener Tangenten oder Punkte ist Teil der Aufgaben. Ferner stellen sich die Lernenden der Frage, ob gegebene Kreise symmetrisch in Bezug zu einer Geraden sind. Indem sie zu einzelnen Beispielen Skizzen anfertigen, vereinfachen die Schülerinnen und Schüler sich die Aufgaben.

RAABE, KLASSE SCHULE

Kreise: Geometrie in der Ebene

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

- Umgang mit Kreisen und Geraden in der Ebene
- Anfertigen von Skizzen
- Aufstellen von Geraden- und Kreisgleichungen
- Berechnung von Schnittpunkten
- Abstandsberechnungen
- Flächenberechnungen

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt

einfaches Niveau   mittleres Niveau   schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Kreis	M1, M2	AB
Skizze anfertigen	M1, [illegible]	AB
Tangente	M1, M2	AB
Winkel bestimmen	M1[illegible]	AB
Abstandsberechnung	M1, M2	AB
Eingeschriebenes Quadrat	M1	AB
Symmetrie	[illegible]	AB
Spiegelgerade	M2	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kreis, Mittelpunkt, Radius, Tangente, Gerade, Symmetrie, Abstandsberechnung, Schnittwinkel, Flächenberechnung, eingeschriebenes Quadrat, Spiegelgerade

Medien: GTR/CAS

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Aufgabenblatt 1 M1

1. Der Kreis k_1 ist gegeben durch seine Gleichung $k_1: x^2 + y^2 - 16x + 2y + 40 = 0$, der Kreis k_2 hat den Mittelpunkt $M_2(-4|7)$ und den Radius $r_2 = 5\,\text{LE}$ und eine Gerade g die Gleichung $g: 3x - 2y = 0$.
   a) Zeigen Sie, dass die beiden Kreise symmetrisch zur Gerade g liegen. Fertigen Sie dazu eine genaue Zeichnung an.
   b) Zwei Punkte auf k_1 und k_2 haben die kürzeste Entfernung. Wie groß ist diese?
   c) Zeigen Sie, dass der Punkt $A(-1|3)$ auf dem Kreis k_2 liegt und bestimmen Sie die Tangente t_2 im Punkt A an k_2. Welchen spitzen Winkel α schließt diese mit der Geraden g ein?
   d) Der Kreis k_1 hat zwei Tangenten, die parallel zu t_2 sind. Wie lautet die Gleichung derjenigen Tangente, die näher an t_2 liegt.

2. Dem Kreis $k: x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ ist ein Quadrat so einzuschreiben, dass eine Diagonale parallel zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Quadrats sowie den Flächeninhalt des Quadrats.

3. Gegeben sind der Kreis $k: x^2 + y^2 - 10x - 8y + 21 = 0$ und die Gerade $g: x + 2y + 22 = 0$. Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises, fertigen Sie eine Skizze von Kreis und Geraden an und bestimmen Sie dann die Gleichung des kleinsten Kreises, der den Kreis k und die Gerade g berührt.

4. Gegeben sind der Kreis $k: x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$ und der Punkt $P(-2|15)$. Bestimmen Sie zuerst den Mittelpunkt M und den Radius r. Berechnen Sie dann die Koordinaten des Punktes S auf k, der dem Punkt P am nächsten liegt.

5. Der Kreis k berührt die Gerade $t: y = -2x - 19$ im Punkt $B(-10|y_B)$. Der Mittelpunkt M liegt auf der Geraden durch die Punkte $P(2|4)$ und $Q(6|3)$. Bestimmen Sie eine Gleichung des Kreises k.

b) Kürzeste Entfernung:

$$d=\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|-r_1-r_2=\sqrt{144+64}-10=\sqrt{208}-10\approx 4{,}42\text{ LE}$$

c) Zu zeigen: $A(-1\,|\,3)\in k_2$

Einsetzen in k_2: $(-1+4)^2+(3-7)^2=25=3^2+(-4)^2=9+16=25\Rightarrow A\in k_2$

Tangente t_2 in A an k_2:

$$t_2:\begin{pmatrix}-1+4\\3-7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}x+4\\y-7\end{pmatrix}=25$$

$$3x+12-4y+28-25=0$$

$$3x-4y+15=0\Rightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{15}{4}$$

Winkel α zwischen t_2 und g:

$$\cos\alpha=\frac{\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}{5\cdot\sqrt{13}}=\frac{17}{5\cdot\sqrt{13}}\Rightarrow\alpha=19{,}44°$$

oder

$$\tan\alpha=\frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{17}{8}}=\frac{6}{17}\Rightarrow\alpha=19{,}44°$$

d) Die Tangente t_2 berührt k_2 im Punkt $A(-1\,|\,3)$. Wegen der Symmetrie der Kreise ist der Mittelpunkt $M'(2\,|\,3)$ der Strecke $[M_1M_2]$ auch der Mittelpunkt der Strecke $[AB]$, wobei B der Berührpunkt der zu t_2 parallelen Tangente an k_1 ist (vgl. Abbildung zu Aufgabe 1a).

Es gilt also:

$$\vec{m}'=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\Rightarrow\vec{b}=2\cdot\vec{m}'-\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow B(5\,|\,3)$ liegt auf einer (zu t_2 parallelen) Geraden $t:y=\frac{3}{4}x+c$

$$3=\frac{15}{4}+c=c=-\frac{3}{4}\Rightarrow t:y=\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}$$

2. $k: x^2+y^2-4x+2y-20=0$

$k:(x-2)^2+(y+1)^2=20+4+1=25\Rightarrow M(2\,|\,-1),\ r=5\text{ LE}$

Aus dem Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ liest man die Steigung $m=\frac{3}{4}$ der Diagonalen d durch M ab:

$$d:y=\frac{3}{4}x+c\wedge M\in d\Rightarrow\frac{3}{4}\cdot 2+c=-1\Rightarrow c=-\frac{5}{2}$$

$$d:y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}$$