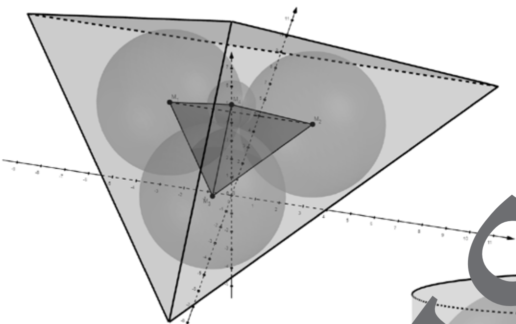
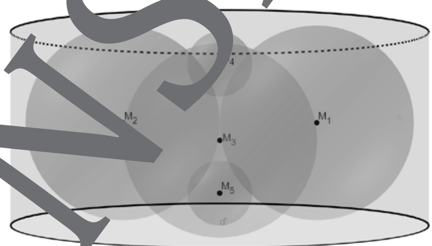
Kugeln, Pyramiden und ein Zylinder

Günther Weber





Grafiken: Günther Weber

Legt man Kugeln in ein pyramidenförmiges oder zylindrisches Gefäß, so entstehen viele Hohlräume. Diese lassen sich teilweise durch kleinere Kugeln füllen. Bei einem pyramidenförmigen Gefäß berühren die Kugeln die Seitenflächen der Pyramide. In diesem Beitrag sind die Kugeln vorgegeben und die berührenden Ebenen gesucht. Da der Kugelradius senkrecht auf der berührenden Ebene (Tangentialebene) im Berührpunkt auf dem Radius steht, spielt der Normalenvektor bei der Lösung der Aufgaben eine entscheidende Rolle.

Kugeln, Pyramiden und ein Zylinder

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Günther Weber

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Sie bestimmen Mittelpunkte und Radien von Kugeln, den Berührpunkt von Kugel und Ebene sowie die Gleichung berührender Ebenen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt **Info** Informationsblatt **DA** Datenauswertung

einfaches Niveau mittleres Niveau schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Berührende Kugeln und Pyramiden	M1	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kugel, Tangentialebene, Normalenvektor, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform, Hessesche Normalenform), Geradengleichung (Zwei-Punkte-Form, Punkt-Richtungs-Form), Schnittpunkt von Ebenen, Abstand von Punkten, Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck, Satz des Pythagoras, Spiegelung an einer Ebene, Pyramide, Zylinder

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die (Hessesche-) Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen durchführen sowie Volumen von Pyramiden und Kegel bestimmen. Die Kugelgleichung muss nicht bekannt sein.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 15.05.2023) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- bestimmen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

In einigen Bundesländern finden sich auch Kompetenzerwartungen, die direkt Kugeln und Ebenen betreffen:

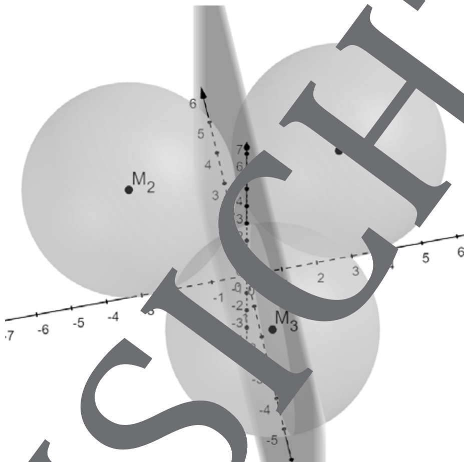
https://kultusministerium.hessen.de/sites/kultusministerium.hessen.de/files/2021–07/kcgo-m.pdf

(abgerufen am 15.05.2023)

- Darstellen von Kugeln mit Vektor- und Koordinatengleichungen,
- Untersuchen der Lagebeziehungen zwischen Kugeln und Geraden sowie zwischen zwei Kugeln,

Berührende Kugeln und Pyramiden **M1**

Auf der xy-Koordinatenebene liegen drei gleich große Kugeln, die sich gegenseitig berühren. Die Kugel k_2 ist das Spiegelbild der Kugel k_1 an der yz-Koordinatenebene. Die yz-Koordinatenebene berührt die Kugeln k_1 sowie k_2 und halbiert die Kugel k_3 .



Grafik: Günther Weber

1. a) Bestimmen Sie die Gleichung der drei Kugeln, wenn die Kugel k_1 den Mittelpunkt $M_1(3|\sqrt{3}|3)$ hat und die y-Koordinate des Mittelpunktes der Kugel k_3 negativ ist.

   $\left[M_2\left(-3|\sqrt{3}|3\right), M_3\left(0|-2\sqrt{3}|3\right), r=3\right]$

   b) Geben Sie die Gleichung einer Ebene E parallel zur xy-Koordinatenebene an, die die drei Kugeln berührt.

2. Eine 4. kleinere Kugel k_4 , deren Mittelpunkt auf der z-Achse liegt, berührt die Kugeln k_1 , k_2 und k_3 sowie die Ebene E.
   Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_4 und den Radius der Kugel k_4 .
   $\left[M_4\left(0|0|5\right), r=1\right]$

3. Die Mittelpunkte der Kugeln bilden eine Dreieckspyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist.
   a) Bestimmen Sie den Winkel zwischen einer Seitenfläche (bzw. Seitenkante) der Pyramide und deren Grundfläche.
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt einer Seitenfläche.
   c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.