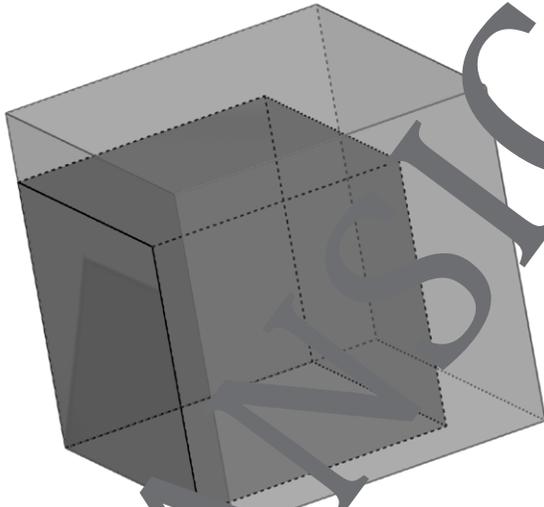


Das Delische Problem

Günther Weber



Grafik: Günther Weber

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Würfel einen Würfel mit dem doppelten Volumen mit Zirkel und Lineal (ohne Markierungen) zu konstruieren, gehört zu den klassischen Aufgaben der griechischen Antike und wird Delisches Problem genannt. Obwohl eine Konstruktion nicht möglich ist, kann die Kantenlänge des Würfels mit doppeltem Volumen aus dem Volumen der Dreifachung einer der Quadratseiten und den daraus resultierenden Rechtecken abgeleitet werden. Mithilfe von Spiegelungen von Eckpunkten der Rechtecke und den dazu gehörenden Funktionen ergibt sich für eine Quadratseite ein Seitenverhältnis von $t:v = \sqrt[3]{2}$, aus dem sich, übertragen in ein räumliches Koordinatensystem, ein Würfel mit doppeltem Volumen ergibt.

Das Delische Problem

Oberstufe (grundlegend)

Günther Weber

Hinweise	1
Aufgaben	3
Lösungen	5

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der Analysis und der Analytischen Geometrie im ebenen Koordinatensystem hinsichtlich der Bestimmung von Geradengleichungen anzuwenden und vergleichen die Lösungsschritte beim Rechenweg in der Analysis und Analytischen Geometrie. Im räumlichen Koordinatensystem wenden die Lernenden ihre erworbenen Kenntnisse (Aufstellen von Geraden- und Ebenengleichungen, Schnitt von Geraden und Ebenen, Spiegelung eines Punktes an einer Ebene) an.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	Ab

Kompetenzprofil:

Inhalt: Normalenvektor, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform, Abstand Punkt – Ebene, Geradengleichung – Mittelpunkt, senkrechte Geraden, Schnittpunkt von Gerade und Ebene, Abstand von Punkten, Spiegelung an Gerade bzw. Ebene

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Die Lernenden können in der Ebene die Gleichung des Mittelpunktes einer Strecke, die Gleichung einer Gerade bzw. die Gleichung einer Mittelsenkrechten mit den Methoden der Analysis bzw. den Methoden der Analytischen Geometrie herleiten. In dreidimensionalen kennen Sie die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bzw. des Schnittpunktes zweier Geraden bereitet den Lernenden keine Probleme. Ebenso sind sie vertraut im Rechnen mit Parametern. Die Jugendlichen kennen die Eigenschaften der Spiegelung an einer Gerade oder Ebene und sie können mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen durchführen.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehraene/lehrplan/47/KLP_GOST_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 19.01.2024) finden Sie unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert.

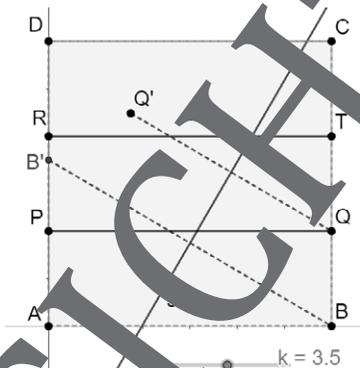
Die Schülerinnen und Schüler ...

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinatenform und in Parameterform dar,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

Aus dem Bereich der Analysis werden vorwiegend Inhalte der Mittelstufe/Jahrgangsstufe 1, wie das Aufstellen von Geradengleichungen, das Aufstellen der Gleichung der Mittelsenkrechten sowie die Bestimmung des Schnittpunktes von Geraden als Kompetenzerwartung gefördert.

Aufgaben:

1. Zwei Seiten eines Quadrates $ABCD$ mit der Seitenlänge $a = 6$ cm liegen im 1. Quadranten auf den Koordinatenachsen. Zwei Parallelen \overline{PQ} und \overline{RT} zur Quadratseite \overline{AB} teilen das Quadrat in 3 kongruente Rechtecke (siehe nebenstehende Abbildung).



Grafik: Günther Wefer

- a) Legen Sie einen Punkt $B'(0|k)$, $0 \leq k \leq 6$ auf die Quadratseite \overline{AD} und variieren Sie mithilfe eines Schiebereglers k (siehe Datei: **Del_Bestimmung_k.ggb**) die Lage des Punktes B' so, dass bei Spiegelung an einer Geraden g der Punkt B auf B' und zugleich der Punkt Q auf die Parallele \overline{RT} abgebildet wird, d. h. dass der Spiegelpunkt Q' von Q auf der Parallelen \overline{RT} liegt.
- b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Spiegelgeraden g , so dass bei Spiegelung an der Geraden g der Punkt B auf B' und zugleich der Punkt Q auf die Parallele \overline{RT} abgebildet wird.
- c) Bestimmen Sie das Streckenverhältnis $\overline{DB'} : \overline{AB'}$.
2. Bestimmen Sie die Gleichung der Spiegelgeraden g aus Aufgabe 1b) mithilfe der Methoden der Analytischen Geometrie und geben Sie die Koordinaten der Spiegelpunkte B' und Q' an.
3. Es ist $A(-1|3|-2)$, $B(3|-1|0)$ und $D(1|7|2)$
- Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD rechtwinklig gleichschenkelig ist.
 - Ergänzen Sie das Dreieck ABD zu einem Quadrat $ABCD$.
 - Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Ebene, die durch die Punkte A , B und D festgelegt ist, in Koordinatenform.
 - Die Punkte P und R liegen auf der Quadratseite \overline{AD} , die Punkte Q und T auf der Quadratseite \overline{BC} , wobei der Punkt Q näher bei B liegt als der Punkt T . Bestimmen Sie die Gleichung zweier Parallelen \overline{PQ} und \overline{RT} zur Quadratseite \overline{AB} , die das Quadrat in 3 kongruente Rechtecke aufteilen.

Sie wollen mehr für Ihr Fach? Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



Über 5.000 Unterrichtseinheiten
sofort zum Download verfügbar



Webinare und Videos
für Ihre fachliche und
persönliche Weiterbildung



Attraktive Vergünstigungen
für Referendar:innen mit
bis zu 15% Rabatt



Käuferschutz
mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:
www.raabe.de