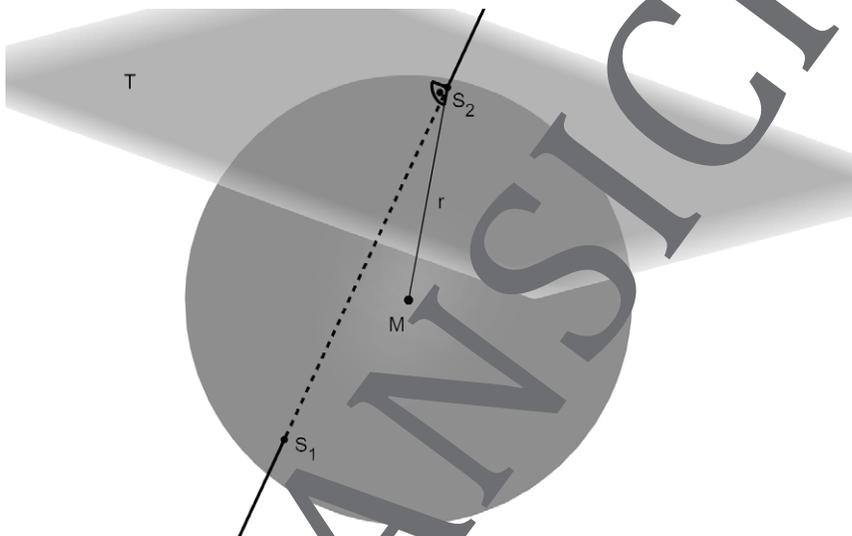


H.1.55

Kreis und Kugel

Die Kugel und ihre Gleichung – Vermischte Übungsaufgaben

Alfred Müller



© RAABE

Grafik: Günter Gerstbrein

In einer Reihe von Übungsaufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler ihr Wissen über die Kugel und die Kugelgleichung. Sie überprüfen die Lage von Kugeln zueinander, ermitteln die Daten von Schnittkreisen und bestimmen die Gleichung von Tangentialebenen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Kompetenzen:	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Analyse, Computer- und Softwareeinsatz, Übung
Thematische Bereiche:	Kugelgleichung, Kugel, Ebene, Ebenengleichung, Hesse-Form, Abstandsberechnung Tangentialebene, Schnittpunkt, Schnittgerade, Schnittkreis, Lotgerade, gegenseitige Lage von Objekten

Hinweise

Um die Übungen zu lösen, müssen die Schülerinnen und Schüler bereits mit der Kugel bzw. Kugelgleichung vertraut sein. Ebenso müssen sie bereits Ebenen und Geraden und die dazugehörigen Gleichungen und sind in der Lage, Abstände zu berechnen sowie Tangenten und Tangentialebenen an eine Kugel zu legen.

Auf einen Blick

Die Kugel und ihre Gleichung – Vermischte Übungsaufgaben

M 1 – Übungsaufgaben

Erklärung zu den Symbolen

 ein niedriges Niveau

 mittleres Niveau

 schwieriges Niveau

Übungsaufgaben

M 1



1. Gegeben sind die Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right]^2 = 25$ sowie die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Der Mittelpunkt einer weiteren Kugel K_2 mit $r_2 = 20$ LE, die von der Kugel K innen berührt wird, liegt auf der Geraden g . Bestimmen Sie die Gleichungen der beiden möglichen Kugeln K_2 und K_2' .

2. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Ebene E_1 und die Gerade g

gegeben durch $E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Ermitteln Sie eine Gleichung von E_1 in Normalenform sowie den Schnittpunkt G und den Schnittwinkel γ der Geraden g mit der Ebene E_1 .
- Für $\sigma_p = 4$ erhält man den Punkt P auf der Geraden g . Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Ebene E_2 auf, die parallel zu E_1 durch P verläuft.
- Die Kugel K berührt die Ebene E_1 im Punkt $Q(4|3|q_3)$ und außerdem die Ebene E_2 . Geben Sie eine Gleichung der Kugel K an.

- Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ schneidet die Kugel K in den Punkten R und S , wobei

der Punkt R die kleinere x_3 -Koordinate besitzt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangentialebene T an R an K . Untersuchen Sie dann die Lage der Geraden g bezüglich T .

3. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(6|4|-1)$, $B(2|2|3)$ und $C(2|0|5)$ gegeben.

- Die Ebene E_1 wird durch die drei Punkte A, B, C bestimmt. Geben Sie eine Gleichung von E_1 in Normalenform an.
- Die Ebenen E_2 und E_2' sind parallel zur Ebene E_1 und haben von dieser jeweils einen Abstand $d = 6$ LE. Geben Sie die Gleichungen dieser Parallelebenen an. Dabei ist E_2 jene Ebene, welche die positive x_3 -Achse und E_2' jene, welche die negative x_3 -Achse schneidet.

- c) Die Kugel K_1 berührt die Ebene E_1 im Punkt B und hat einen Mittelpunkt mit lauter positiven Koordinaten auf E_2 . Stellen Sie eine Gleichung der Kugel K_1 auf.
- d) Die Ebene E_1 schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten P, Q, R. Bestimmen Sie den Mittelpunkt H und den Radius r_2 der Kugel K_2 , die durch die Punkte P, Q, R und den Ursprung O verläuft.
- e) Die Ebene E_1 zerlegt die Kugel $K_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right]^2 = 54$ in zwei Teile, wobei ein Teil den

Koordinatenursprung O enthält. Welcher der beiden Teile hat das größere Volumen? Begründen Sie ihre Antwort.

4. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Punkte $A(-3|1|2)$, die Gerade g und die Kugeln K_1 und K_2 gegeben mit den Gleichungen

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, K_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 36, K_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 36.$$

- a) Weisen Sie nach, dass der Punkt A nicht auf der Geraden g liegt. Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch den Punkt A und die Gerade g aufgespannt wird, in Normalenform auf.
- b) Berechnen Sie $c_3 > 0$, so dass der Punkt $C = (1|c_3|c_3)$ auf der Kugel K_1 liegt und geben Sie eine Gleichung der Tangentialebene T in C an K_1 an. Weisen Sie dann nach, dass die Ebene T auch die Kugel K_2 berührt und bestimmen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes D von T mit K_2 .
- c) Zeigen Sie, dass sich die Kugeln K_1 und K_2 schneiden und symmetrisch zur Ebene E liegen. Bestimmen Sie den Mittelpunkt R sowie den Radius ρ des Schnittkreises k der Kugeln K_1 und K_2 .
- d) Die Gerade h durch den Mittelpunkt M_1 der Kugel K_1 hat den Richtungsvektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a schneidet die Gerade h die Ebene E? Zeigen Sie, dass sich die Gerade h und die Ebene E außerhalb des Schnittkreises k schneiden.

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

