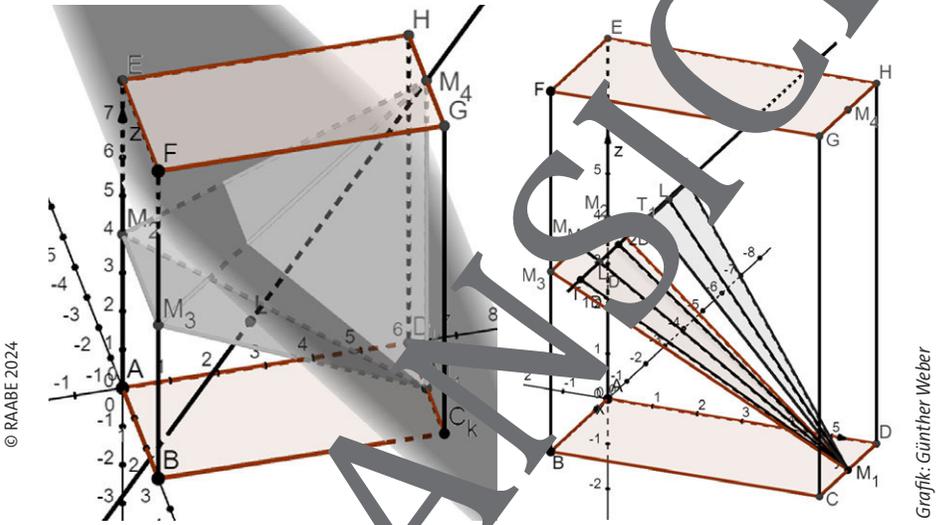


## E.2.41

### Lagebeziehungen

## Quader- und Pyramidenschar

Günther Weber



© RAABE 2024

Grafik: Günther Weber

Wählt man für den Parameter bei einer Punkte-, Geraden- oder Ebenenschar einen gültigen Zahlenwert, so erhält man genau einen Punkt, eine Gerade oder eine Ebene. In mehreren Aufgaben überprüfen die Lehrlernenden und Schüler die Lagebeziehung von Punkten der Schar zu einer Geraden bzw. zu einer Ebene oder von Geraden einer Schar zu einer Ebene. Die Lernenden bestimmen den Parameter, dass bestimmte Eigenschaften wie die Gleichschenkligkeit von Dreiecken erfüllt sind. Die Bestimmung des Parameters kann auch zu einem Extremwertproblem führen, bei dem die Jugendlichen die Extremstellen ermitteln. Dabei zeigt sich, dass sich auch Methoden der Analysis in Aufgaben aus dem Bereich der analytischen Geometrie anwenden lassen.

## KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe:</b>	11/12/13
<b>Dauer:</b>	3–4 Unterrichtsstunden
<b>Kompetenzen:</b>	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
<b>Methoden:</b>	Abiturvorbereitung Bildanalyse, Computer- und Softwareeinsatz, Diskussion, Übung
<b>Thematische Bereiche:</b>	Ortsvektoren von Punkten, Flächeninhalt, Innenwinkel im Dreieck, Wertebereich von Winkeln im Dreieck, Geradengleichung, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform), Lagebeziehung von Punkt und Dreieck, Lotgerade, Schnitt von Gerade und Ebene, Schnittwinkel von Ebenen, Abstand Punkt zu Ebene, Abstand zweier Punkte, Volumen Pyramide, Volumen Quader, Drehung einer Dreiecksfläche

## Fachliche Hinweise

### Inhaltliches

Die Schülerinnen und Schüler lernen, ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Sie berechnen die Innenwinkel von Ebenen und bestimmen deren Wert. Ebenso überprüfen Sie, ob es einen Parameter gibt, sodass ein Dreieck, dessen Eckpunkte davon abhängen, gleichseitig bzw. rechtwinklig wird. Sie bestimmen den Lotfußpunkt des Lotes von der Spitze der Pyramide auf die Grundebene und überprüfen, ob es einen Parameter gibt, sodass der Lotfußpunkt und der Schwerpunkt des Dreiecks zusammenfallen. Die Jugendlichen bestimmen alle Parameter, sodass die Punkte auf einer Kante des Quaders einen bestimmten Abstand von einem vorgegebenen Punkt haben. Sie berechnen den Schnittwinkel zweier Ebenen und bestimmen die Bildpunkte eines Dreiecks, das bei Drehung um diesen Winkel entsteht.

Die Aufgaben fördern eine Vielzahl der Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler im Bereich analytische Geometrie vor dem Abitur verfügen sollten. Sie eignen sich daher auch gut zur Vorbereitung auf das Abitur.

### Lernvoraussetzungen

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungsform der Geradengleichung sowie die Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Eine Punktprobe oder die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen können mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstands- und Winkelberechnungen (auch mit Parameter) durchführen sowie Flächeninhalte von Dreiecken und das Volumen von Quadern und Pyramiden bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, den Ortsvektor eines festen Punktes auf einer Gerade anzugeben und durch Abstandsberechnung die Koordinaten des Punktes zu berechnen. Sie wissen, dass bei einer Drehung ein Dreieck auf ein kongruentes Dreieck abgebildet wird.

### Lehrplanbezug

Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen

[https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP\\_GOSt\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf)

(aufgerufen am 29.07.2024) findet sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

#### Die Schülerinnen und Schüler

- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- untersuchen Lagebeziehungen [...] zwischen Geraden und Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Bei einigen Aufgabenteilen gibt es mehrere Lösungswege. Bei diesen Aufgaben können Sie Ihre Lerngruppe in zwei bzw. drei Gruppen aufteilen und die Aufgaben dann auf unterschiedlichen Lösungswegen berechnen lassen. Im Anschluss stellen die Gruppen ihren Lösungsweg vor und die Klasse diskutiert die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten. Bei den Aufgaben 3a), 3b) und 4c) bietet es sich an, die Lösungswege mit GeoGebra zu veranschaulichen. Bei Aufgabe 4c) sollten Sie bei schwächeren Lerngruppen zudem den Lösungsweg im Unterrichtsgespräch erarbeiten. Wurde die Lagebeziehung von Punkt und Dreieck vor längerer Zeit im Unterricht behandelt, so sollte die Eigenschaft, wann ein Punkt im Dreieck liegt, wiederholt werden.

## Auf einen Blick

### Quader- und Pyramidenschär

M 1

Aufgaben

Benötigt:

- GTR/CAJ
- GeoGebra

### Erklärung zu den Symbolen



leichtes Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

## Aufgaben

Die Punkte  $A(0|0|0)$ ,  $B(3|0|0)$ ,  $D_k(0|k|0)$ ,  $0 < k \leq 8$  und  $E(0|0|8)$  sind die Eckpunkte eines Quaders (siehe nebenstehende Abbildung)

- Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Quaders.

**Anmerkung:** Bei den folgenden Aufgabenstellungen wird der Index des Parameters  $k$  weggelassen.

- Die Diagonalen  $\overline{BG}$  und  $\overline{CF}$  schneiden sich in einem Punkt  $S$ . Bestimmen Sie  $k$  so, dass das Dreieck  $BCS$ 
  - rechtwinklig ist
  - gleichseitig ist

- Es sei  $M_1$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{CD}$ ,  $M_2$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{AE}$ ,  $M_3$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BF}$  und  $M_4$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{GH}$ .

- Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene  $E_k$  durch die Punkte  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$ .
- Begründen Sie, dass das Dreieck  $M_1M_2M_3$  gleichschenkelig ist.
- Bestimmen Sie, welche Winkelgröße der Winkel  $\sphericalangle M_2M_1M_3$  – das ist der Winkel an der Spitze des Dreiecks  $M_1M_2M_3$  – annehmen kann und berechnen Sie den Parameter  $k$ , bei dem die Winkelgröße am stärksten abnimmt.
- Bestimmen Sie rechnerisch abhängig von  $k$  den Flächeninhalt des Dreiecks  $M_1M_2M_3$ .
- Berechnen Sie abhängig von  $k$  die Länge des Lotes von  $M_4$  auf die Ebene  $E_k$  aus Teilaufgabe a) und bestimmen Sie  $k$  so, dass das Lot die Ebene  $E$  im Schwerpunkt des Dreiecks  $M_1M_2M_3$  trifft.

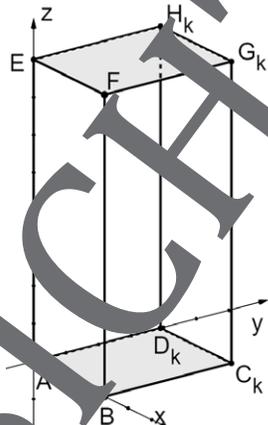
**Hinweis:** Der Ortsvektor des Schwerpunktes  $S$  eines Dreiecks mit den Eckpunkten  $A$ ,

$B$  und  $C$  berechnet sich nach der Formel  $\vec{s} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

- Überprüfen Sie, ob das Verhältnis der Volumina der Pyramide mit der Grundfläche  $M_1M_2M_3$  und der Spitze im Punkt  $M_4$  und dem Ausgangsquader unabhängig vom Parameter  $k$  ist. Geben Sie dieses Verhältnis an.

Die Pyramide hat ein Volumen von  $24$  VE. Bestimmen Sie den zugehörigen Parameter  $k$  und überprüfen Sie, ob für dieses  $k$  das Lot von  $M_4$  innerhalb der Grundfläche  $M_1M_2M_3$  der Pyramide liegt.

Es sei  $M_5$  der Mittelpunkt der Strecke  $\overline{BC}$  und  $P$  ein Punkt auf der Quaderkante  $\overline{DH}$ . Bestimmen Sie alle Punkte  $P$ , für die der Abstand vom Mittelpunkt  $M_2$  gleich dem Abstand vom Punkt  $M_5$  zu  $M_2$  ist.



Quelle: Günther Weber

# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

