P.1.24

Tests und Klausuren – Tests

Lineare Abhängigkeit, Teilverhältnisse und ein mathematischer Beweis – Übungstests aus Analytischer Geometrie

Alfred Müller

Von leichtem bis schwierigem Niveau bewegt sich der Anspruch der vier Übungstests aus analytischer Geometrie. Die Schülerinnen und Schüler beschäftigen sich beim Lösen der Aufgaben nicht nur mit Geraden und Ebenen, sondern bauen anhand vorgegebener Punkte Pyramiden auf, deren Volumina und Oberfläche sie berechnen. Ferner untersuchen sie Vektoren auf lineare Abhängigkeit, bestimmen das Verhältnis, in dem ein dritter Punkt die Strecke zwischen zwei anderen teilt, und führen einen Beweis.
Überprüfen Sie mit den Tests die Kenntnisse Ihrer Schülerinnen und Schüler und bereiten Sie sie damit auf das schriftliche Abitur vor. Alternativ können Sie den Jugendlichen die Übungstests aber auch zum Selbststudium und zur Selbstkontrolle zur Verfügung stellen. Ein Bewertungsschlüssel sowie Zeitvorgaben für jeden Test sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11/12/13

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz

Methoden: Abiturvorbereitung, Analyse, Computer- und Softwareeinsatz, Übungen

Thematische Bereiche: Prüfungsvorbereitung, Übungstest, Vektoren, Vektorraum, lineare Abhängigkeit, Pyramide, Kugel, Geraden, Ebenen, Hesse-Form

Fachliche Hinweise

Die Jugendlichen verfügen über räumliches Vorstellungsvermögen und können mit Punkten, Geraden und Ebenen im Raum umgehen. Sie sind in der Lage, Vektoren auf lineare Abhängigkeit zu untersuchen, können Flächen und Volumina von Kugel und Pyramide berechnen und verstehen es, im Rahmen einer Beweisführung, mathematisch zu argumentieren.

Auf einen Blick

Übungstests aus analytischer Geometrie

M 1 Lineare Abhängigkeit, Teilverhältnis, Geraden, Ebenen
M 2 Geraden, Ebenen und eine Pyramide
M 3 Geraden, Ebenen, Abstände und ein Beweis
M 4 Viereck, Pyramide und Kugel

Erklärung zu den Symbolen

leichtes Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Geraden, Ebenen und eine Pyramide

M 2

1. Die Ebene E_1 verläuft parallel zum Vektor $\vec{u}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ durch die Punkte $A(2|-2|8)$ und $B(1|-2|10)$. Finden Sie eine Gleichung von E_1 in Normalenform. **[4 BE]**

2. Gegeben ist die Schar von Geraden $g_a:\vec{x}=\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}, a,\sigma\in\mathbb{R}$.

   a) Für welchen Wert von a schneidet die zugehörige Gerade g_a die Ebene E_1 **nicht?** Welche besondere Lage hat diese Gerade g_a? **[3 BE]**

   b) In welchem Punkt R und unter welchem Winkel α schneidet die Gerade g_0 für a = 0 die Ebene E_1? **[4 BE]**

   c) Welchen Abstand besitzt der Punkt $C(2|-$[illegible]$|2)$ von der Geraden g_0 für a = 0, welchen von der Ebene E_1? **[4 BE]**

3. Die Ebene E_2 enthält die x_3-Achse sowie die Gerade g_{-4} für $a=-4$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform sowie eine Gleichung der Schnittgeraden s und den Schnittwinkel φ der Ebenen E_1 und E_2. **[5 BE]**

4. Die drei Koordinatenachsen und die Ebene E_1 begrenzen eine Pyramide $S_1S_2S_3O$.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte S_1, S_2, S_3 der Pyramide und zeichnen Sie diese in ein Koordinatensystem. Bestimmen Sie dann Volumen und Oberfläche der Pyramide. **[6 BE]**

   b) Zeigen Sie, dass die Ebene E_2 Symmetrieebene dieser Pyramide ist und überprüfen Sie, welche Lage die Punkte $P($[illegible]$3|3)$ und $Q(-3|3|3)$ bezüglich dieser Pyramide besitzen. **[4 BE]**

   c) Für welche Werte von a haben die Geraden g_a mit der Pyramide nur den Ursprung O gemeinsam? Für welchen Wert von a verläuft die Gerade g_a durch den Schwerpunkt der [illegible]fläche, die den Ursprung nicht enthält? **[4 BE]**

   d) Zeigen Sie, dass der Punkt $M(4|-4|8)$ der Mittelpunkt der Umkugel K der Pyramide ist. Welche Gleichung besitzt diese Kugel K? Bestimmen Sie dann die Koordinaten der Punkte D_1 und D_2, in denen die Gerade g_2 für a = 2 die Kugel K durchstößt. **[6 BE]**

Arbeitszeit: 55 Minuten **Gesamt: [40 BE]**

M 3 Geraden, Ebenen, Abstände und ein Beweis

1. In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ [illegible] \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{9}{a} \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, a \neq 0, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sowie der Punkt $P(2|2|[illegible])$ gegeben.

a) Welche besondere Lage besitzt die Gerade g im Koordinatensystem? Zeigen Sie dann, dass die Geraden g und h_a für jeden Wert $a \neq 0$ eine Ebene E_a aufspannen und bestimmen Sie eine Gleichung von E_a in Normalenform. **[6 BE]**

b) Bestimmen Sie dann den Wert für a so, dass der Koordinatenursprung O von der Ebene E_a den Abstand 3 LE besitzt. **[3 BE]**

c) Nun sei a = 2. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S und die Größe des Schnittwinkels φ der Ebene E_2 mit der [illegible]-Achse sowie den Abstand des Punktes P von der Ebene E_2. **[6 BE]**

2. Gegeben ist ferner die Gerade $k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \\ [illegible] \end{pmatrix} + [illegible] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \\ 1 \end{pmatrix}, [illegible] \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und k windschief sind. **[4 BE]**

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden f, die durch den Punkt P verläuft und die Geraden k und g schneidet sowie die Schnittpunkte. **[5 BE]**

c) Bestimmen Sie einen Vektor in Richtung des kürzesten Abstands der windschiefen Geraden g und k sowie dessen Betrag. Überprüfen Sie, ob die Gerade f Trägergerade des kürzesten Abstandes ist. **[5 BE]**

d) Berechnen Sie dann den kürzesten Abstand sowie die Trägerpunkte $T_1 \in g$ und $T_2 \in k$ des kürzesten Abstandes. **[5 BE]**

3. Beweisen Sie:
Wenn in einem Viereck ABCD die Diagonalen einander halbieren und gleich lang sind, dann ist das Viereck ein Rechteck. **[6 BE]**

Arbeitszeit: 45 Minuten **Gesamt: [40 BE]**