

R.6.11

Flächen- und Rauminhalte

Geometrie im Garten – Modellierung einer Gartenlaterne und einer Sonnenuhr

Günther Weber



© RAABE 2025

© Alyssum / iStock / Getty Images Plus

Durch geeignete Modellierung von Objekten im Garten können diese mit den Methoden der Analytischen Geometrie untersucht werden. Dabei untersuchen die Lernenden den räumlichen Aufbau einer Laterne bzw. einer Sonnenuhr. Sie berechnen die Koordinaten von Eckpunkten und bestimmen Winkel bzw. die Größe von Flächen. Mithilfe vorgegebener Richtungsvektoren beschreiben die Schülerinnen und Schüler die Länge eines Schattens bzw. die Position eines Vogels nach einem Flug zu einem Baum.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	4–5 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
Methoden:	Computer- und Softwareeinsatz, digitale Übung, Übung
Materialart:	GeoGebra-Datei, Grafik
Inhalt:	Ortsvektoren von Punkten, parametrisierte Form der Kreisgleichung, Winkelfunktionen, Geradengleichung, Einheitsrichtungsvektoren, Schnitt von Gerade und Ebene, Schnittwinkel von Ebenen bzw. Gerade und Ebene, Mittelpunkt einer Strecke, Abstand zweier Punkte, Punktprobe, Volumen/Mantelfläche Pyramide bzw. Pyramidenstumpf, Volumen/Mantelfläche Kugelsegment

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden können die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die Normal- und Koordinatenform der Ebenengleichung. Eine Punktprobe oder die Bestimmung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene bereitet ihnen keine Probleme. Die Lernenden können mit den Methoden der Analytischen Geometrie Abstandsberechnungen und Winkelberechnungen durchführen sowie Flächeninhalte von Sechsecken und das Volumen von Zylindern und Pyramiden (-stümpfen) bestimmen. Die Schülerinnen und Schüler können den Ortsvektor eines festen Punktes auf einer Gerade angeben und durch Abstandsberechnung die Koordinaten des Punktes berechnen. Die Winkelfunktionen und der Satz des Pythagoras sind bekannt.

Lehrplanbezug

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/331/gost_klp_m_2023_06_17.pdf

(aufgerufen am 18.11.2024) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler ...

- wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
- berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
- untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum,
- untersuchen Lagebeziehungen von Punkten sowie von Geraden und Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
- berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
- führen Spiegelungen an Ebenen durch,
- untersuchen geometrische Objekte aus Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Aus den Inhalten der 11. Stufe nutzen sie den Satz des Pythagoras, die Winkelfunktionen sowie die Kreisgleichung und berechnen Volumina bzw. Flächen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen

Bevor man mit der Bearbeitung der Aufgaben beginnt, besprechen Sie mit Ihren Schülerinnen und Schülern anhand der Abbildungen der Gartenlaterne und der Sonnenuhr, wie man die Gegenstände günstig in ein Koordinatensystem legen kann, damit eine Berechnung leichter fällt.

Zur Gartenlaterne

Vor der Bearbeitung der Aufgaben zur Gartenlaterne erklären Sie, dass sich ein reguläres Sechseck aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammensetzt und die Eckpunkte auf einem Kreis liegen. In diesem Zusammenhang kann auch, sofern nicht bekannt, die parametrisierte Form der Kreisgleichung erarbeitet werden, oder Sie geben den Lernenden diese Form an. Vor der Bearbeitung von **Aufgabe 2)** zeigen Sie anhand der Abbildung der Leuchte, auch die in der Aufgabenstellung beschriebenen einzelnen Teile der Leuchte, die im Folgenden berechnet werden sollen, und vor **Aufgabe 3d)** zeigen Sie mithilfe von GeoGebra, welcher Winkel gesucht ist.

Zur Sonnenuhr

Ebenso wie bei der Gartenlaterne werden die im Text beschriebenen Teile bei der Sonnenuhr anhand der Abbildung verdeutlicht. Vor **Aufgabe 1e)** klären Sie im Unterrichtsgespräch, welche Eigenschaften die Punkte haben müssen, damit sie Punkte des Halbkreises sind. Sind bei **Aufgabe 4)** die Formeln für das Hohlkugelsegment nicht bekannt, so geben Sie diese an oder Ihre Schülerinnen und Schüler recherchieren im Internet danach. Diese Aufgabe bietet sich auch zur Differenzierung an, indem leistungsstarke Jugendliche die Berechnung mit den Methoden der Analysis durchführen.

Bei vielen Aufgabenstellungen kann der Sachverhalt mithilfe von GeoGebra veranschaulicht und die Lösung bestimmt bzw. die Lösung kontrolliert werden. Insbesondere bei schwächeren Lerngruppen empfiehlt sich diese Vorgehensweise.

M 1 Bildmaterial: Eine dreiflämmige Gartenlaterne



Leuchte



Fuß der Laterne



Günter Weber

© RAABE 2025

Aufgaben Sonnenuhr

Eine Deko-Sonnenuhr besteht im Wesentlichen aus einem Pfeil sowie einem ca. 2 cm breiten inneren Ring, der senkrecht zum Pfeil befestigt ist und auf dem die Zahlen stehen. Der Pfeil und der innere Ring sind durch einen ca. 2 cm breiten Halbring so verbunden, sodass der Ring auf den Pfeil 7 cm von der Spitze bzw. vom Ende entfernt trifft.

Der Halbring ist befestigt auf einem Hohlkugelsegment (-haube) und diese wiederum auf einem Hohlzylinder. Die gesamte Sonnenuhr steht auf einer zylindrischen Holzscheibe mit einem Durchmesser von 30 cm. Diese Scheibe ist auf einem 73 cm hohen Kantholz befestigt, dessen rechteckige Querschnittsfläche 6 cm x 6 cm beträgt.



Foto: Günther Weber

Anmerkung: Für die folgenden Aufgaben wurde die Breite und Dicke der Ringe sowie die Dicke des Pfeils, der Pfeilspitze, der Pfeilfeder bzw. der Befestigungen nicht berücksichtigt.

- In einem geeigneten Koordinatensystem liegt der Mittelpunkt des Pfeils im Punkt $M(0|0|29)$ und die Spitze im Punkt $P_S(16|0|45)$.
 - Bestimmen Sie den Punkt P_E , an dem der Pfeil endet und geben Sie die Länge des Pfeils an.
 - Begründen Sie, dass der Pfeil in dem gewählten Koordinatensystem in der xz -Koordinatenebene liegt.
 - Bestimmen Sie den Winkel, den der Pfeil gegen die Holzscheibe bildet, wenn die Pfeilspitze in der xy -Koordinatenebene liegt.
 - Bestimmen Sie die Punkte, an denen der Halbring am Pfeil befestigt ist.
 - Begründen Sie, dass sich alle Punkte auf dem Halbring darstellen lassen durch den

$$\text{Vektor } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 29 \end{pmatrix} - 15,63 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

