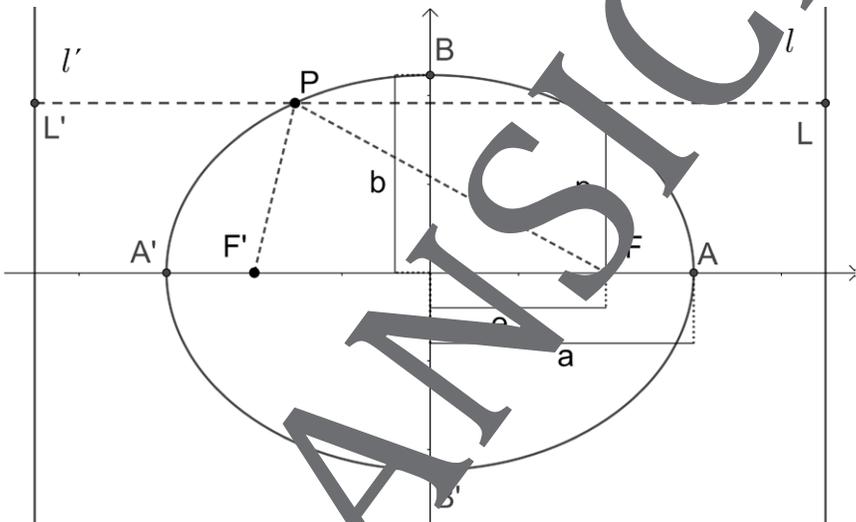


## U.43

### Ausgewählte Themen

# Grundlagen der ebenen Geometrie – Geraden, Kreise, Kegelschnitte

Alfred Müller



© RAABE 2025

© Günter Gerstbrein

Die Materialien behandeln die Grundlagen der ebenen Geometrie und eignen sich sowohl als Ergänzung zur Einführung in das Thema als auch zur Wiederholung.

Die Schülerinnen und Schüler lernen zweidimensionale Vektoren kennen und bilden damit Geraden in der Ebene. Es folgt eine Betrachtung von Kreisen. Dabei unterscheiden die Lernenden die verschiedenen Möglichkeiten, wie zwei Kreise zueinander liegen können, aber auch, wie eine Gerade zu einem Kreis liegen kann.

Schließlich betrachten die Jugendlichen auch die Kegelschnitte und ihre Gleichungen in der Ebene – die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel.

---

## KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe:</b>	11/12/13
<b>Kompetenzen:</b>	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, Problemlösekompetenz
<b>Methoden:</b>	Abiturvorbereitung, Analyse, Auswertung, Übung
<b>Thematische Bereiche:</b>	Ebene Geometrie, Vektor, Gerade, Kegelschnitt, Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel

---

## Fachliche Hinweise

Die Lernenden sind mit dem kartesischen Koordinatensystem vertraut und können mit Vektoren rechnen. Auch Winkel- und Längenberechnungen sind ihnen bekannt.

## Auf einen Blick

---

### Grundlagen der ebenen Geometrie – Geraden, Kreise, Kegelschnitte

<b>Thema:</b>	Übergreifendes Thema nennen
<b>M 1</b>	Wiederholung
<b>M 2</b>	Geraden
<b>M 3</b>	Kreise
<b>M 4</b>	Kegelschnitte

## Wiederholung

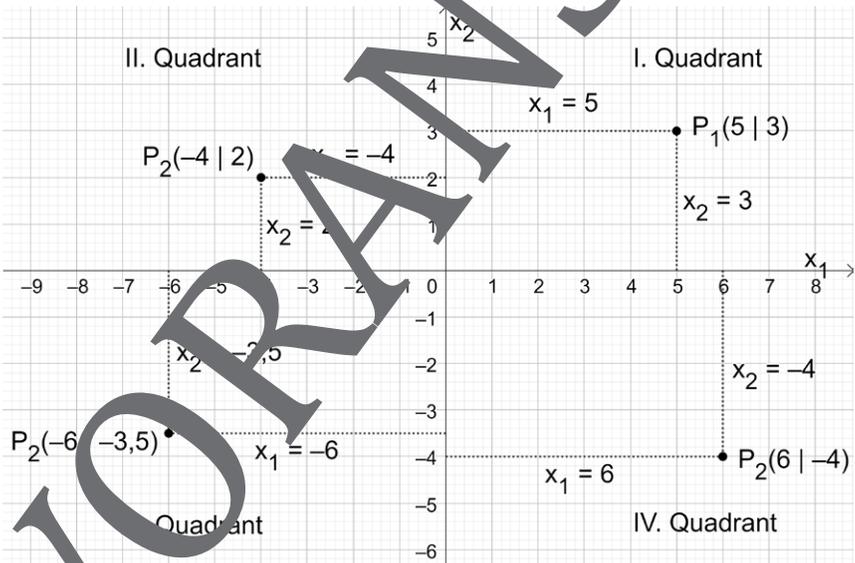
M 1

Die Grundlage der ebenen Geometrie ist das Rechnen mit Vektoren in der zweidimensionalen Zahlenebene unter der Verwendung der Koordinatenschreibweise. Dabei werden die bisherigen Erkenntnisse aus der Mittelstufe in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt und Lagebeziehungen erkundet. Dazu kommen Längen- und Winkelmessungen mit Hilfe des Skalarprodukts, das auch zur Berechnung von Flächeninhalten verwendet werden kann.

### Kartesisches Koordinatensystem

Das in der Zeichenebene verwendete Koordinatensystem hat zwei zueinander senkrechte Zahlengeraden, die sich im Ursprung  $O$  schneiden. Neben der früher üblichen Bezeichnung mit  $x$ - und  $y$ -Achse verwendet man in der analytischen Geometrie auch die Bezeichnung  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse.

Zur Kennzeichnung von Punkten in der Ebene benötigt man zwei Koordinaten, z. B.  $A(a_1 | a_2)$ . In der nachfolgenden Abbildung sind folgende Punkte dargestellt:  $P_1(5 | 3)$ ,  $P_2(-4 | 2)$ ,  $P_3(-6 | -3,5)$  und  $P_4(6 | -4)$



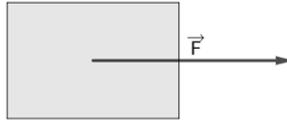
Grafik: Günter Gerstbrein

## Vektoren in der Ebene $E_2$

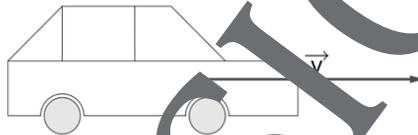
Aus der Physik kennt man Größen, die nicht nur durch Maßzahl und Einheit, sondern auch durch ihre Richtung bestimmt sind.

**Beispiele:**

Eine Kraft  $F$  greift an einem Körper an.



Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit  $v$ .



In einem Koordinatensystem werden nicht nur Punkte betrachtet, sondern auch Verbindungen untereinander. Zwischen zwei Punkten A und B unterscheidet man die Streckenlänge  $\overline{AB}$  und den „Pfeil“  $\vec{AB}$  mit dem Fußpunkt A und der Spitze B, d. h.  $\vec{AB}$  besitzt eine Länge und eine Richtung. Man definiert

### Vektoren und Repräsentanten

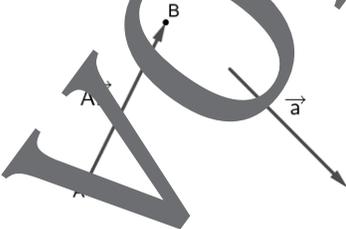
Unter einem **Vektor** versteht man die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und parallelen Pfeile (= parallelgleiche Pfeile).

Ein einzelner Pfeil heißt **Repräsentant** dieses Vektors.

Da es umständlich ist, jedes Mal von einem Repräsentanten eines Vektors zu sprechen, verwendet man auch kurz die Bezeichnung „Vektor“ für einen Repräsentanten.

Vektoren werden wie folgt geschrieben:

1. Mit kleinen Buchstaben, über denen Pfeile stehen:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
2. Durch zwei Punkte der orientierten Strecke mit Pfeil darüber:  $\vec{AB}, \vec{PQ}, \vec{XY}, \dots$



Grafiken: Günter Gerstbrein

**Anmerkung:**

Eine Menge  $V$ , deren Elemente Vektoren sind, heißt ein **reeller Vektorraum**, wenn es eine Vektoraddition mit den auf Seite 8 aufgelisteten Gesetzen (1) – (5) und eine  $\mathbb{R}$ -Multiplikation mit Zahlen aus  $\mathbb{R}$  und den auf Seite 10 angegebenen Gesetzen (1) – (4) gibt.

Der  $\mathbb{R}^2$  bildet einen reellen Vektorraum mit der koordinatenweisen Addition und  $\mathbb{R}$ -Multiplikation. Er heißt auch **arithmetischer Vektorraum**.

Im  $\mathbb{R}^2$  kann man folgende Formeln ableiten:

**Mittelpunkt**

Den Ortsvektor des **Mittelpunktes M** einer Strecke  $[AB]$  erhält man folgendermaßen:

$$\vec{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

$$\vec{m} - \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

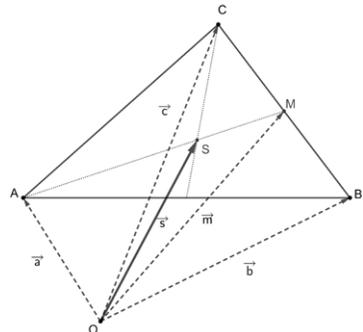
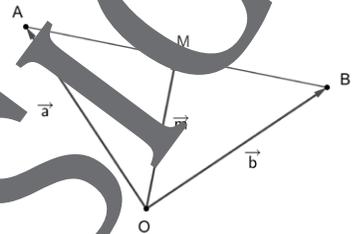
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

Den **Schwerpunkt S** eines Dreiecks  $ABC$  als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, wird wie folgt bestimmt:

Wenn  $A$  ein Eckpunkt und  $M$  der gegenüberliegende Seitenmittelpunkt ist, dann gilt mit den Sätzen der Mittelstufe:

$$\vec{AS} = \frac{2}{3} \cdot \vec{AM}$$

$$\begin{aligned} \vec{s} &= \vec{OS} = \vec{OA} + \vec{AS} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{m} - \vec{a}) \\ &= \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \left[ \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a}) \right] \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \\ &= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$



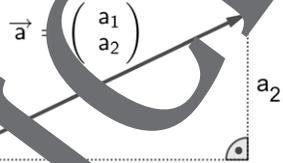
Grafik: Günter Gerstbrein

## Längenmessung

Der Satz des Pythagoras hilft, die Länge eines Vektors bzw. die Länge einer Strecke zu bestimmen. Man definiert:

Unter dem **Betrag**  $|\vec{a}|$  eines Vektors  $\vec{a}$  versteht man die Länge des zum Vektor  $\vec{a}$  gehörenden Pfeils. Wenn man  $\vec{a}$  in der Koordinatenschreibweise angibt, so erhält man:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



Die **Länge**  $|\overline{AB}|$  einer Strecke  $[AB]$  bestimmt man als die Länge des zugehörigen Vektors:

$$|\overline{AB}| = |\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

Grafik: Günter Gerstbräun

### Beispiel:

Bestimmen Sie die Länge der Strecke  $[AB]$  mit  $A(1|-2)$  und  $B(5|2)$ .

### Lösung:

$$|\overline{AB}| = |\vec{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

### Einheitsvektor

Ein Vektor mit dem Betrag 1 heißt Einheitsvektor. Zu jedem Vektor  $\vec{a} \neq \vec{0}$  gibt es die beiden

Einheitsvektoren  $\vec{a}^{\circ} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$  bzw.  $\vec{a}^{\circ} = -\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

### Beispiel:

Bestimmen Sie zum Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$  die zugehörigen Einheitsvektoren.

### Lösung:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \vec{a}^{\circ} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{a}^{\circ} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

# Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.  
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online  
14 Tage lang kostenlos!

[www.raabits.de](http://www.raabits.de)

