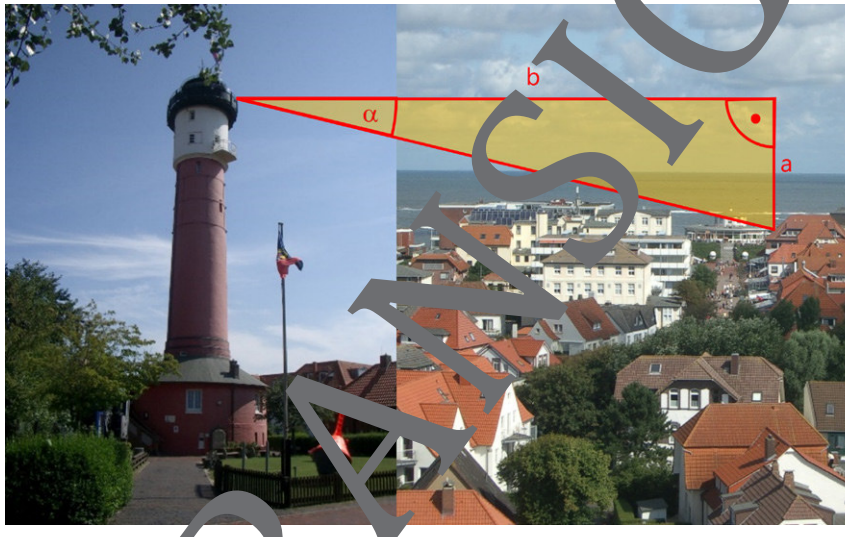
V.24

Unterrichtsexperimente

Die Vermessung unserer Welt

Wie wir uns mit Trigonometrie orientieren können

Dr. Jürgen Franke



© Dr. Jürgen Franke

Genaue Landkarten gibt es seit etwas mehr als 200 Jahren. In dieser Zeit wurde mit markanten Punkten, wie Türmen oder Berggipfeln, ein Netz von Dreiecken über die Landschaft gelegt und von den Eckpunkten aus vermessen. So konnten nach und nach die geografischen Koordinaten dieser Punkte ermittelt und damit maßstabsgetreue Landkarten erstellt werden. Bis in die 1990er Jahre war die Triangulation Stand der Technik in der Landvermessung. Heute kommt die Standortbestimmung mittels GPS-Satelliten hinzu. Mit speziellen GPS-Referenzstationen auf der Erde bietet sie Zentimeter-Genauigkeit. Letztendlich basiert aber auch GPS auf der Triangulation, nur dass die Vorgänge und Berechnungen für uns unsichtbar in Smartphone-Apps ablaufen, währenddessen die klassische Landvermessung viel aufwändiger war.

© RAABE 2025

VORANSICHT

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	9/10
Kompetenzen:	Analysekompetenz, Zusammenhänge herstellen, mathematisch argumentieren und beweisen
Methoden:	Datenerhebung, Datenauswertung
Thematische Bereiche:	Trigonometrische Funktionen, Sinussatz, Cosinussatz und Anwendungen

Didaktisch-methodische Hinweise

Vorausgesetzt wird hier, dass bereits rechtwinklige Dreiecke und deren Gesetzmäßigkeiten im Unterricht behandelt wurden. Die trigonometrischen Funktionen werden hier eingeführt. Je nach Kenntnisstand der Schülerinnen und Schüler können Sie diesen Teil auch schneller durchgehen oder übergehen. Neben theoretischen Herleitungen wird hier Wert darauf gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler die Gesetzmäßigkeiten selbst praktisch anwenden. Um dies zu ermöglichen, finden Sie in diesem Beitrag zwei Bastelbögen, die Sie auf 180 g/m² Karton kopieren können.

Besser, sofern möglich, drucken Sie die Original-Grafikdateien *„Neigungswinkelmesser_Druck.gif“* und *„Winkelmessvorrichtung_Druck.gif“*, die Sie vom Downloadbereich dieses Materials herunterladen können, auf einem qualitativ hochwertigen Drucker aus. Damit können Winkelmessungen vorgenommen und so Dreiecke, z. B. mit den Eckpunkten auf verschiedenen Tischen im Klassenzimmer, festgelegt werden. Anschließend messen die Schülerinnen und Schüler die Winkel dieser Dreiecke und erhalten auch die Winkelsumme 180°. In der Realität werden Abweichungen festzustellen sein, weshalb sich auch eine Diskussion über die mögliche Messgenauigkeit und die Fehler bei den berechneten Entfernungen anbietet.

Es ist möglich, dass einige Schülerinnen und Schüler einen Neigungswinkelmesser als Smartphone-App installiert haben. Das würde den Neigungswinkelmesser in **M 2** ersetzen. Sie können die Nutzung alternativ zulassen oder auch Vergleichsmessungen zwischen dem Bastelbogen-Messgerät und dem Smartphone anregen.

Zur Lösung der Aufgaben empfiehlt sich der Einsatz eines Taschenrechners. Es wird vorausgesetzt, dass die Schülerinnen und Schüler wissen, wie man damit die Funktionswerte der trigonometrischen Funktionen und deren Umkehrfunktionen bestimmt. In diesem Beitrag wird auf die Winkeldarstellung im Bogenmaß ($360° \triangleq 2 \cdot \pi$) verzichtet. Weisen Sie die Schülerinnen und Schüler aber darauf hin, ihre Taschenrechner auf „Winkelgrad“ (oft mit der Bezeichnung „DEG“) einzustellen.

© RAABE 2025

VORANSICHT

Auf einen Blick

Die Vermessung unserer Welt

Wie wir uns mit Mathematik orientieren können

M 1 **Trigonometrie**
Warum beschäftigen wir uns so intensiv mit Dr[illegible]cken?
Sinus, Cosinus, Tangens
Welche Werte können Sinus und Cosinus [illegible]ehmen?
Welche Werte kann die Tangens-Fu[illegible]ktion ann[illegible]men?
Quadrierte trigonometrische Fu[illegible]tion
Umkehrfunktionen

M 2 **Neigungswinkel**
Höhen aus dem Neigungs[illegible]kel bestimmen
Neigungswinkelmesser-Baste[illegible]gen

M 3 **Sinussatz**
Herleitung
Gebäudehöhe mit Hinde[illegible]is

M 4 **Cosinussatz**
Herleitung

M 5 **Triangulation**
Winkelmessvor[illegible]ht[illegible]ng-Bas[illegible]lbogen

Benötigte Materialien

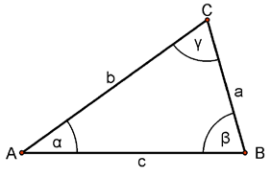
- ☐ Tas[illegible]enrechner
- ☐ Sch[illegible]
- ☐ [illegible]snagel
- ☐ Fa[illegible]
- ☐ 1-Cen[illegible]münze
- ☐ Klebeband
- ☐ Klebstoff
- ☐ Lineal/Geodreieck
- ☐ 2 Karteikarten DIN A6
- ☐ 1 Blatt DIN A4 180 g/m²
- ☐ Stadtplan oder Smartphone mit Karten-App

© RAABE 2025

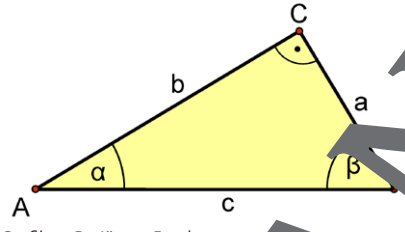
VORANSICHT

M 1 Trigonometrie

Warum beschäftigen wir uns so intensiv mit Dreiecken?



Dreiecke sind die einfachsten Formen in der Ebene. Sie definieren sich entweder aus den Positionen von drei bekannten Punkten oder aus drei Seitenlängen oder auch aus drei Winkeln. Oder man hat eine Länge und zwei Winkel oder zwei Längen und einen Winkel gegeben. (Anmerkung: Sind nur drei Winkel bekannt, so ist das Dreieck nicht eindeutig definiert. Es ergeben sich ähnliche Dreiecke unterschiedlicher Größe. Auch bei der Angabe von zwei Seitenlängen und einem Winkel gibt es Fälle, in denen das Dreieck nicht eindeutig definiert ist.) Neben den allgemeinen Dreiecken gibt es auch noch einige spezielle, wie das gleichseitige Dreieck mit drei gleich langen Seiten, oder das gleichschenklige Dreieck, mit zwei gleich langen Seiten.



Grafiken: Dr. Jürgen Franke

Ein ganz besonderes und auch sehr wichtiges Dreieck ist das rechtwinklige Dreieck. In ihm ist einer der drei Winkel 90°. Das rechtwinklige Dreieck folgt speziellen Gesetzen, die teilweise schon seit Jahrtausenden bekannt sind. Der Satz des Pythagoras ist eine davon. Dieser Lehrsatz, bzw. die bekannte Formel $a^2+b^2=c^2$ wird in den verschiedensten Zusammenhängen immer wieder angewendet.

Das Messen von Winkeln ist oft einfacher als das Messen von Längen. Für die Landvermessung hat man deshalb ein virtuelles Netz aus Dreiecken über die Landschaft gelegt, mit markanten Bauwerken oder Berggipfeln als Eckpunkte, und die Winkel dieser Dreiecke gemessen. Letztlich beruht auch GPS-Navigation auf der Messung der Längen in Dreiecken, um so die Position des Empfängers relativ zu den bekannten Positionen der Sender zu berechnen. Dazu braucht man sowohl für klassische als auch für moderne Messmethoden die Gesetzmäßigkeiten der Trigonometrie.

Hier soll es jetzt um die wichtigsten trigonometrischen Funktionen gehen. Sie beschreiben die Verhältnisse zweier Seiten im rechtwinkligen Dreieck in Abhängigkeit eines Winkels.

© RAABE 2025

VORANSICHT

Umkehrfunktionen

Es kommt genauso vor, dass man den Winkel nicht kennt, sondern nur die Seitenlängen des rechtwinkligen Dreiecks. Dann benötigt man die Umkehrfunktionen

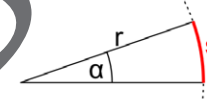
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right) \qquad \alpha = \arccos\left(\frac{b}{c}\right) \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{a}{b}\right)$$

Oft werden sie auch so bezeichnet

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) \qquad \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b}{c}\right) \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

DEG und RAD

Wir verwenden hier Winkelgrad als Maßeinheit für Winkel. Ein kompletter Kreis hat definitionsgemäß 360°. Man kann einen Winkel aber genauso als das Verhältnis des Kreisbogens s zum Radius r angeben. Damit entsprechen $360° \rightarrow 2 \cdot \pi \approx 6{,}28$.



Diese Winkelskala ist dimensionslos und wird Bogenmaß genannt. Der Umrechnungsfaktor ist folglich $f = \frac{2 \cdot \pi}{360°}$, um von Winkelgrad auf Bogenmaß umzurechnen.

Ein 60°-Winkel hat im Bogenmaß den Wert $60° \cdot \frac{2 \cdot \pi}{360°} = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05$.

Tabellenkalkulationsprogramme verlangen die Winkelangabe im Bogenmaß. Taschenrechner verfügen über eine Umschaltung zwischen Gradmaß, mit **DEG** bezeichnet, und Bogenmaß, mit **RAD** bezeichnet, was sich dann entsprechend auf die trigonometrischen Funktionen auswirkt. Achte also beim Taschenrechner auf die **DEG**-Einstellung, wenn, wie hier, alle Winkel im Gradmaß angegeben werden.

© RAABE 2025

VORANSICHT

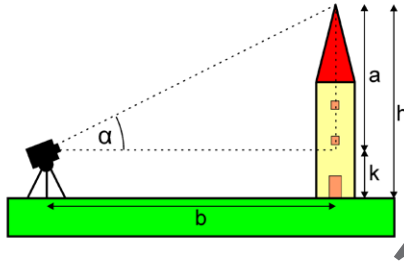
Neigungswinkel

M 2

Höhen aus dem Neigungswinkel bestimmen

Für astronomische Beobachtungen, für die klassische Navigation und für die trigonometrische Höhenbestimmung muss man Neigungswinkel messen. Bei großen Entfernungen ist die Erdkrümmung zu berücksichtigen, nachfolgend werden wir sie aber wegen der relativ kleinen Abstände vernachlässigen.

Hier soll es um die Bestimmung von Höhen gehen. Eine Entfernung auf dem Boden zu messen ist einfacher als eine Höhe. Deshalb wird die Messung der Höhe durch eine am Boden und eine Winkelmessung ersetzt. Es ergibt sich so ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Winkel α bestimmt werden kann. Der Abstand b zum Objekt kann auf dem Boden gemessen werden. Die Seitenlänge a kann über die Tangensfunktion berechnet werden:



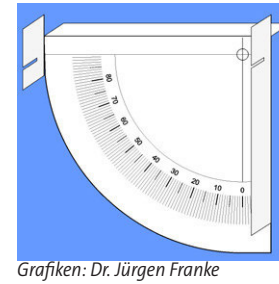
$$\frac{a}{b} = \tan\alpha \qquad a = b \cdot \tan\alpha$$

In der Realität wird man den Neigungswinkelmesser auf ein Stativ stellen oder im Stehen in der Hand halten, um den Winkel zu messen. Damit ergibt sich noch eine Beobachtungs-Höhe k, die zu der ermittelten Gegenkathete dazu addiert werden muss, um die Bauwerkshöhe h zu bestimmen.

© RAABE 2025

Aufgabe 1

Der Bastelbogen auf der folgenden Seite sollte auf ein dickeres Papier (ca. 180 g/m²) kopiert werden. Besser und auch empfohlen ist es, von der Originaldatei *„Neigungswinkelmesser_Druck.gif“* vom Downloadbereich dieses Materials für jeden Schüler und jede Schülerin einen DIN A4 Ausdruck auf einem qualitativ guten Drucker anzufertigen. Du benötigst noch einen Faden, etwas Klebeband und eine Münze. Schneide den Neigungswinkelmesser aus dem Bastelbogen aus. Falze ihn und verbinde ihn mit dem Faden und der Münze entsprechend der Anleitung. Du kannst ihn für die Messung an der oberen abgeknickten Kante halten. Je nachdem, ob du positive oder negative Winkel messen willst, siehst du durch den linken oder rechten Schlitz. Die Skala ist so gestaltet, dass der Winkel Null ist, wenn du den Neigungswinkelmesser genau waagrecht hältst.



Grafiken: Dr. Jürgen Franke

VORANSICHT

RAAbits Online
@RAABE

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.
Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen

Testen Sie RAAbits Online 14 Tage lang kostenlos!
www.raabits.de

RAAbits Online – Das Portal für Unterrichtsmaterialien und Schulorganisation