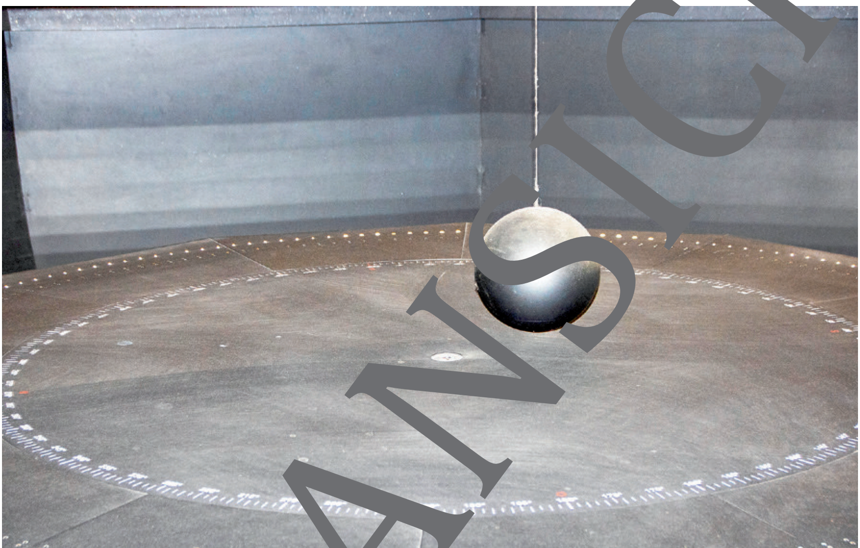
Die Physik des Fadenpendels

Gerhard Deyke, Hamburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing



Ein Foucault'sches Pendel ist ein langes, sphärisches Pendel mit einer großen Pendelmasse, mit dessen Hilfe ohne Bezug auf Beobachtungen am Himmel die Erdrotation nachgewiesen werden kann. Es geht auf den französischen Physiker Léon Foucault (1819–1868) zurück. In diesem Beitrag setzen sich Ihre Schüler mit den Gleichungen auseinander, die die Physik des Fadenpendels beschreiben. Sie lösen Übungsaufgaben, in denen sie die Gleichungen anwenden. So erarbeiten sie sich die Grundlagen, um zu verstehen, wie Foucault seinerzeit die Erdrotation gemessen hat.

RAABE
KLASSE SCHULE

Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Physik

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH
Ein Unternehmen der Klett Gruppe
Rotebühlstraße 77
70178 Stuttgart
Telefon +49 711 62900-0
Fax +49 711 62900-60
meinRAABE@raabe.de
www.raabe.de

Redaktion: Anna-Greta Wittnebel
Satz: Röser Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe
Bildnachweis Titel: © lauradibiase/iStock/Getty Images Plus
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing
Korrektorat: Johanna Stotz, Wyhl a. K.; Dr. Stefan Völker, Jena.

Die Physik des Fadenpendels

Oberstufe (Niveau)

Gerhard Deyke, Hamburg
Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier, Barbing

Die Schüler lernen:

In diesem Beitrag setzen sich Ihre Schüler mit den Gleichungen auseinander, die die Physik des Fadenpendels beschreiben. Sie lösen Übungsaufgaben, in denen sie die Gleichungen anwenden. So erarbeiten sie sich die Grundlagen, um zumindest Aufgaben aus dem Mechanik-Bereich „Schwingungen" in der Abiturprüfung zu meistern.

M 1 Die Gleichungen des Fadenpendels

Die folgenden Betrachtungen setzen die Kenntnis der Physik des Federpendels voraus, die in jedem Physikbuch der Oberstufe abgehandelt wird. Insbesondere werden an diesem Oszillator als bekannt angesehen:

Periode:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}} \qquad (1)$$

Weg-Zeit-Gesetz:

$$s(t) = \hat{s}\,\sin(\omega\, t) \qquad (2)$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz:

$$v(t) = \dot{s}(t) = \hat{s}\,\omega\,\cos(\omega\, t) \qquad (3)$$

Beschleunigung-Zeit-Gesetz:

$$a(t) = \dot{v}(t) = -\hat{s}\,\omega^2\,\sin(\omega\, t) \qquad (4)$$

Mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

Definition des Fadenpendels:

Bei einem **Fadenpendel** hängt die schwingende Masse m an einem Faden der Länge ℓ. Die Masse wird als Massenpunkt behandelt (wenn nicht anderes vermerkt wird) und der Faden als masselos.

Beim **Federpendel** ergab sich die Periode T aus dem linearen Kraftgesetz für die rücktreibende Kraft F:

$$F = -D \cdot s \qquad (5)$$

D ist die sog. **Federkonstante** und s die **Elongation**. Das Minuszeichen in Gl. (5) macht darauf aufmerksam, dass die rücktreibende Kraft die **entgegengesetzte Richtung** hat wie diejenige Kraft, welche die Feder um die Länge s spannt (vgl. **Hooke'sches Gesetz**). Aus dieser linearen Abhängigkeit ergab sich auch das Weg-Zeit-Gesetz (2) für eine **sog. harmonische Schwingung.**

Analog zu der Vorgehensweise beim Federpendel suchen wir nach dem Kraftgesetz für die rücktreibende Kraft beim Fadenpendel, um die Periode T zu bestimmen.

Zunächst eine kurze Vorüberlegung:

Unter einem **Bogendreieck** verstehen wir einen Kreissektor mit Mittelpunktswinkel φ beim Kreismittelpunkt M. Es handelt sich also beim Bogendreieck um ein Dreieck, bei dem die eine Seite durch einen Kreisbogen ersetzt ist.

Für Bogendreiecke mit gleichem Mittelpunktswinkel φ gilt ein dem Strahlensatz vergleichbares Gesetz.

ΔMAB und ΔMCD seien 2 Bogendreiecke mit demselben Mittelpunktswinkel φ (siehe Abb. 1).

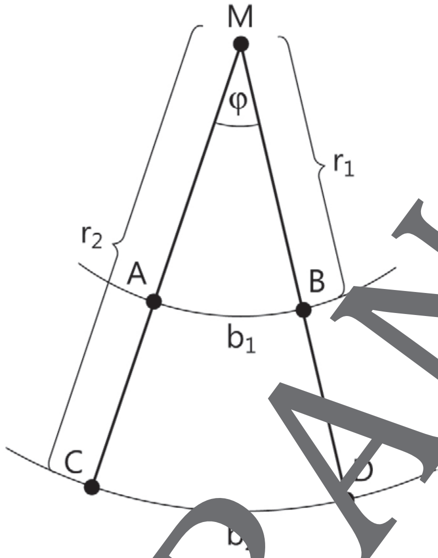


Abb. 1, Grafik: D[illegible] Zettlme[illegible]

Man erhält:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2\pi\, r_1\, \varphi \;/\; 360°}{2\pi\, r_2\, \varphi \;/\; 360°} = \frac{r_1}{r_2}$$

M.a.W. verhalten sich die Bögen der Dreiecke zueinander wie die zugehörigen Kreisradien.

Nun ist beim Fadenpendel die rücktreibende Kraft $\vec{F}_{\text{rück}}$ diejenige Komponente der Gewichtskraft $\vec{F}_G$ der anhängenden Masse m, welche auf dem Faden **senkrecht** steht. Sie weist damit **tangential zum Kreis**, auf dem sich die Masse bewegt (siehe Abb. 2). (Die andere Kraftkomponente spannt den Faden.)

Im Kräfteparallelogramm mit dem Winkel φ in Abbildung 2 ergibt sich sofort

$$\vec{F}_{\text{rück}} = m \cdot \sin(\varphi) \cdot \vec{g} \qquad (6)$$

mit der Fallbeschleunigung $\vec{g}$ am Ort des Pendels. Bei Messung von φ im Bogenmaß wäre $\varphi = s$ (die Elongation des Pendels), wenn ℓ die Einheitslänge 1 wäre. Ist ℓ nicht die Einheitslänge, dann gilt nach unserer früheren Überlegung über Bogendreiecke:

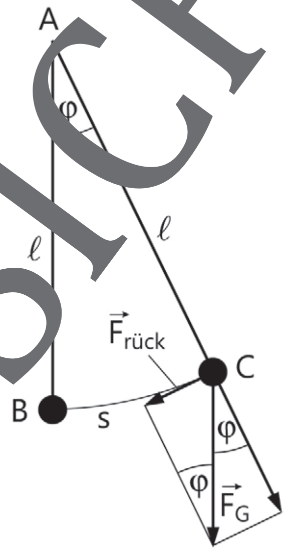


Abb. 2, Grafik: W. Zettlmeier

$$\frac{s_1}{s} = \frac{1}{\ell} \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{s}{\ell} = \varphi$$

und Gl. (6) nimmt die Form

$$\vec{F}_{\text{rück}} = m \cdot \sin\left(\frac{s}{\ell}\right) \cdot \vec{g} \qquad (6')$$

an. Ein Vergleich von $\sin\varphi$ und φ im Bogenmaß (φ_{Bog}) gibt interessante Konsequenzen für Gl. (6'). Ist $\varphi = 5°$, so erhält man $\sin(5°) \approx 0{,}087$ und $\varphi_{Bog} \approx 0{,}087$, also mit 3 signifikanten Nachkommastellen Übereinstimmung von $\sin(s/\ell)$ und s/ℓ. (s/ℓ ist Bogenmaß des Winkels φ.)

M 2 Aufgaben zum Fadenpendel

1. Untersuchen Sie auf volle Grad, bis zu welchem Winkelbetrag von φ (in Grad) s/ℓ um weniger als $5\ \%$ von $\sin(s/\ell)$ abweicht. Halten Sie Ihre Ergebnisse tabellarisch fest.

2. Beim Federpendel gilt das Gesetz für die Periode T: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$ (Gl. (1)).

   Leiten Sie durch einen Analogieschluss das Gesetz für die Periode des Fadenpendels her. Kommentieren Sie auch die Größen, von denen die Periode abhängt bzw. nicht abhängt.

Aus dem linearen Kraftgesetz ergaben sich die Gleichungen (2), (3) und (4). Sie sind (bei kleinen Auslenkwinkeln φ) also auch hier gültig, sodass auch das Fadenpendel seine größte Geschwindigkeit v beim Durchgang durch die „Ruhelage" ($\varphi = 0°$) hat und seine größte Beschleunigung in den „Umkehrpunkten" erfährt. Das Fadenpendel schwingt **harmonisch**.

Bearbeiten Sie nun mit diesem Wissen die nachfolgende Aufgabe:

3. An einem dünnen Faden der Länge $\ell = 1{,}45\ \text{m}$, dessen Masse vernachlässigt werden kann, hängt eine kleine, schwere Kugel der Masse $m = 12\ \text{g}$. Dieses Fadenpendel wird nun um den Winkel $\varphi =$ [illegible] ausgelenkt; es führt in der Folgezeit harmonische Schwingungen mit der Periode T aus. Von Reibung wird in beiden Teilen der Aufgabe abgesehen.
   a) Ermitteln Sie die Anzahl N der Schwingungen in 1 min.
   a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v der Kugel zur Zeit $t_1 = 0{,}5\ \text{s}$.

   Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass das Pendel zur Zeit $t = 0$ die Elongation $s = 0$ hat.

4. An einem dünnen Faden der Länge $\ell = 1{,}45\ \text{m}$, dessen Masse vernachlässigt werden kann, hängt eine kleine, schwere Kugel der Masse $m = 22\ \text{g}$. Dieses Fadenpendel wird nun um den Winkel $\varphi = 6°$ ausgelenkt; es führt in der Folgezeit harmonische Schwingungen mit der Periode T aus. Es werde in allen Aufgabenteilen unterstellt, dass keine Reibung vorliegt.
   a) Ermitteln Sie die Anzahl N der Schwingungen in $1\ \text{min}$.
   b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 der Kugel zur Zeit $t_1 = 0{,}5\ \text{s}$, wenn das Pendel zur Zeit $t = 0$ seine Schwingung mit maximaler Auslenkung beginnt.

c) Bestimmen Sie auch die Pendelgeschwindigkeit v_2 beim Durchgang durch die „Ruhelage“. Vergleichen Sie v_2 mit v_1.

d) Das Pendel wird jetzt anfänglich um $\varphi = 48°$ ausgelenkt. Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_3 beim Durchgang durch seine Ruhelage. (Beachten Sie Ihr unter Nr. 1 gefundenes Ergebnis.) Kommentieren Sie Ihr Ergebnis im Vergleich zu v_2.

Wir betrachten ein weiteres, nicht harmonisch schwingendes Pendel der Länge $\ell = 1{,}50\,\text{m}$. Es werde anfangs um $\varphi_{max} = 85°$ ausgelenkt, also wesentlich mehr, als für die Näherungen bei einer harmonische Schwingung erlaubt ist. $85°$ beträgt also der während der Schwingung maximal auftretende Auslenkungswinkel. Alle anderen Winkel $\varphi\ (\leq \varphi_{max})$ sind momentane Auslenkungswinkel während der Schwingung.

Unser Interesse gilt der Periode T dieses Pendels. Von Reibung sehen wir wieder ab.

Bei der Bearbeitung von Aufgabe 4 d) wurde eine Abhängigkeit der momentanen Bahngeschwindigkeit v von φ erkennbar ($v(\varphi)$). Mit nachfolgender Idee können wir die Zeit $T_{1/4}$ für eine Viertelschwingung von $\varphi = \varphi_{max}$ bis $\varphi = 0°$ näherungsweise bestimmen. Dann ist aus Symmetriegründen $T = 4 \cdot T_{1/4}$. Wir zerlegen das Winkelintervall $[\varphi_{max};0°]$ – ungewöhnliche Darstellung der Intervallschreibweise – in die Teilwinkelmenge

$\{\varphi_1 = \varphi_{max} = 85°;\ \varphi_2 = 85° - \Delta\varphi;\ \varphi_3 = 85° - 2\Delta\varphi;\ \varphi_4 = 85° - 3\Delta\varphi;\ \ldots\ ;\ \varphi_{N+1} = 0°\}$

mit $N = 10^3$ und $\Delta\varphi = 85°/N$.

Wir unterstellen, dass die Pendelkugel den Weg (Kreisbogen) Δs_i im Winkelintervall $[\varphi_i\ ;\ \varphi_{i+1}]$ mit der als konstant angesehenen Geschwindigkeit $v(\varphi_i)$ zurücklegt. Da $\Delta\varphi$ sehr klein ist, wird der begangene Fehler „erträglich“ sein. Dann lässt sich die Zeit Δt_i berechnen, welche das Pendel benötigt, um Δs_i zurückzulegen. Die Summe über alle Teilzeiten Δt_i ergibt dann $T_{1/4}$.

5. Führen Sie diesen Gedanken für das oben beschriebene Fadenpendel durch und berechnen Sie (also näherungsweise) seine Periode T auf $1\,\text{ms}$ genau. Bestimmen Sie die Periode T_1 dieses Pendels mit der in Aufgabe 2 ermittelten Formel, wohl wissend, dass die Formel nicht zulässig ist. Geben Sie auch die relative Abweichung des Größenwertes T_1 von T

$\frac{T_1 - T}{T}$ in % an.