

# Die Trojaner – Begleiter des Planeten Jupiter

Werner Auer, Fürth

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier



© da-kuk/E+/Getty Images Plus

Die Schüler/innen und Schüler/innen mithilfe des sog. kreisförmig eingeschränkten Dreikörperproblems und des Hebelgesetzes Fakten über das System Sonne-Jupiter und Saturn, also über den Schwerpunkt des Systems, kennen. Ferner bekommen sie Kenntnisse über Asteroiden, insbesondere über die sog. Trojaner mit Bahnbestimmungselementen. Dabei spielt das 3. Gesetz von Kepler eine besondere Rolle, gelingt es doch damit z. B. die Masse eines Trojaners zu bestimmen. Tiefergehend geht es dann um die exakte Lösung des Dreikörperproblems – unter der oben genannten Bedingung – nach Lagrange. Hier im Vortrag beschränken wir uns auf die Lagrangepunkte  $L_4$  und  $L_5$ .

## Impressum

RAABE UNTERRICHTS-MATERIALIEN Physik

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Es ist gemäß § 60b UrhG hergestellt und ausschließlich zur Veranschaulichung des Unterrichts und der Lehre an Bildungseinrichtungen bestimmt. Die Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH erteilt Ihnen für das Werk das einfache, nicht übertragbare Recht zur Nutzung für den persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung. Unter Einhaltung der Nutzungsbedingungen sind Sie berechtigt, das Werk zum persönlichen Gebrauch gemäß vorgenannter Zweckbestimmung in Klassensatzstärke zu vervielfältigen. Jede darüber hinausgehende Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Hinweis zu §§ 60a, 60b UrhG: Das Werk oder Teile hiervon dürfen nicht ohne eine solche Einwilligung an Schulen oder in Unterrichts- und Lehrmedien (§ 60b Abs. 3 UrhG) vervielfältigt, insbesondere kopiert oder eingescannt, verbreitet oder ins Netzwerk eingestellt oder sonst öffentlich zugänglich gemacht oder wiedergegeben werden. Dies gilt auch für Kopien an Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen. Die Aufführung abgedruckter musikalischer Werke ist ggf. ZMA-meldepflichtig.

Für jedes Material wurden die Rechte recherchiert und ggf. angefragt.

Dr. Josef Raabe Verlags-GmbH  
Ein Unternehmen der Raabe Gruppe  
Rotebühlstraße 77  
70178 Stuttgart  
Telefon +49 711 6290-0  
Fax +49 711 62900-60  
meinRAABE@raabe.de  
www.raabe.de

Redaktion: Annette de Witte  
Satz: Raabe Media GmbH & Co. KG, Karlsruhe  
Bildnachweis Titel: © da-kuk/E+/Getty Images Plus  
Illustrationen: Dr. W. Zettlmeier, Barbing  
Konzept: Daniela Link, Mönchengladbach.; Dr. Stefan Völker, Jena

# Die Trojaner – Begleiter des Planeten Jupiter

Oberstufe (grundlegend und weiterführend)

Werner Auer, Fürth

Illustrationen von Dr. Wolfgang Zettlmeier

<b>Hinweise</b>	<b>1</b>
<b>M 1 Aufgaben</b>	<b>4</b>
<b>M 2 Daten</b>	<b>7</b>
<b>M 3 Der gravitative Einfluss der Trojaner auf die Sonne</b>	<b>9</b>
<b>Lösungen</b>	<b>11</b>

## Die Schüler lernen:

im System Jupiter-Sonne genaue Verhältnisse durch das sogenannte kreisförmig eingeschränkte Dreikörperproblem kennen. Der Beitrag führt ihnen zwei der fünf Lagrangepunkte mit ihren Auswirkungen vor Augen, nämlich die Lagrangepunkte  $L_4$  und  $L_5$ .

## Überblick:

Legende der Abkürzungen:

**Ab** = Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	Ab
Daten	M2	Ab
Der gravitative Einfluss der Trojaner auf die Sonne	M3	Ab

## Kompetenzprofil:

**Inhalt:** kreisförmig eingeschränktes Körperproblem, Schwerpunkt, Hebelgesetz, Asteroid, Keplersche Gesetze (insbesondere das dritte), Masse, (fünf) Lagrangepunkte, Sinussatz, Rechnen mit Wurzeln

**Medien:** GTR/CAS, GeoGebra

**Kompetenzen:** Über Basiswissen verfügen (F1), Kenntnisse wiedergeben (F2), Probleme lösen (F3), Wissen kontextbezogen anwenden (F4), Analogien bilden (F5), Phänomene beschreiben (E1), Informationen auswählen (E2), Modellvorstellungen verwenden (E3), Formeln anwenden (E4), Idealisierungen vornehmen (E5), Wissen austauschen (K1), Recherchieren (K3), Präsentieren (K6), Diskutieren (K7)

## Hinweise zu den Trojanern

Die Lösung des sogenannten **Dreikörperproblems** ist trotz zahlreicher Versuche vieler bekannter Mathematiker nur numerisch gelungen. Nun fand im achtzehnten Jahrhundert der Mathematiker Lagrange für das sogenannte eingeschränkte Dreikörperproblem eine exakte Lösung, wenn die Masse des dritten Körpers keinen Einfluss auf die Bewegung der beiden anderen massereicheren Körper ausübt. Er bestimmte fünf sogenannte **Librationspunkte**, die zu seinen Ehren **Lagrangepunkte** genannt wurden.

Die Lagrangepunkte  $L_1$  und  $L_2$  der Erde sind in der Astronomie von großer Bedeutung. In diese Punkte hat man **Beobachtungssatelliten** gebracht, um von dort (z. B. von  $L_1$  aus) die Sonne das ganze Jahr über ungehindert beobachten zu können.

Die hier untersuchten Begleiter des Planeten Jupiter – sie werden **Trojaner** genannt – befinden sich in den Lagrangepunkten  $L_4$  und  $L_5$ , also jeweils  $60^\circ$  hinter Jupiter in stabilen Umlaufbahnen mit derselben Umlaufzeit wie Jupiter. Es sind insgesamt über 6000 Asteroiden, die erst ab dem Jahr 1906 nach und nach entdeckt wurden.

### Lehrplanbezug

Das Niveau ist für die Oberstufe geeignet, aber grundlegend. Die Schülerinnen und Schüler<sup>1</sup> arbeiten entweder einzeln oder in Partnerarbeit. Dabei recherchieren sie mithilfe des Internets. Sie lernen physikalische Texte zu erfassen, zu vergleichen und zu bewerten. Sie zerlegen die erkannten Probleme und reflektieren ihre Ergebnisse. Als mathematische Grundvoraussetzung sind die Kenntnis des Kosinussatzes sowie ein etwas tiefergehendes Rechnen mit Wurzeln erforderlich.

### Fachliche Hinweise

Da das Bestimmen der Bahn eines Körpers im **Zweikörperproblem** mithilfe der Gleichungen von Newton exakt gelöst werden kann, versuchte man, die Bahn eines Körpers im **Dreikörperproblem** zu bestimmen. Es stellte sich heraus, dass dieses Problem, wenn sich ein Körper im Gravitationsfeld zweier anderer Körper bewegte, nur näherungsweise mit numerischen Methoden zu lösen war. Der Astronom und Mathematiker Joseph-Louis

<sup>1</sup> Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren Verlauf nur noch „Schüler“ verwendet.

Lagrange hat nun gegen Ende des achtzehnten Jahrhunderts eine exakte Lösung zu dem Problem vorgelegt, wenn er folgende Annahmen machte:

- „(I) Die Masse des Körpers, dessen Bewegung studiert werden soll, ist sehr klein gegenüber den Massen  $m_1$  und  $m_2$  der beiden anderen Körper. Die kleine Masse  $m$  beeinflusst also die Bahn der beiden großen Massen nicht.
- (II) Die beiden massereicheren Körper bewegen sich auf Kreisbahnen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.
- (III) Der massearme Körper bewegt sich in derselben Ebene, in der auch die Kreisbahnen der beiden anderen Körper liegen.“<sup>2</sup>

Lagrange fand als Lösung dieses Problems im System zweier Himmelskörper fünf Punkte, die sogenannten Librationspunkte, an denen ein weiterer Körper angeschlossen werden kann. Die massereicheren Himmelskörper mit der derselben Umlaufzeit, wie der masseärmere Körper umkreisen kann. Er ändert dabei relativ zu diesem seine Position nicht.

Zur Betrachtung und weiteren Erörterung wählt man als die beiden massereicheren Himmelskörper die Sonne und den Planeten Jupiter.

**Siehe dazu Abbildung 1:**

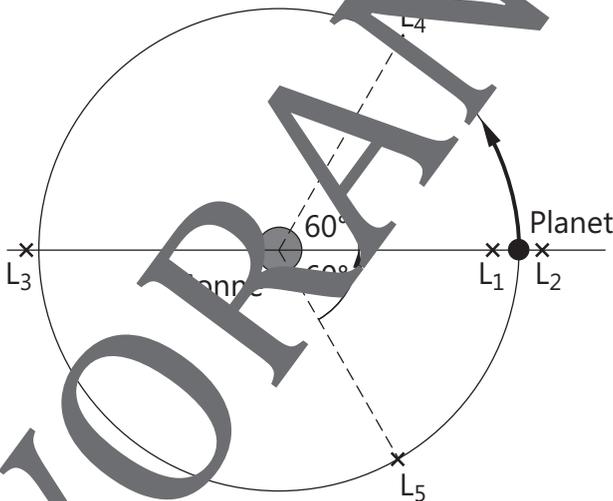


Abbildung 1; Grafik: Dr. W. Zettlmeier

<sup>2</sup> Gerhard Deyke: A.6.13 Das sog. kreisförmig eingeschränkte Drei-Körper-Problem

Die Lagrangepunkte  $L_1$  bis  $L_3$  befinden sich auf der Verbindungsgeraden der Massenzentren von Sonne und Jupiter.

Die beiden Lagrangepunkte  $L_4$  und  $L_5$  befinden sich jeweils am dritten Eck eines gleichseitigen Dreiecks. Die Verbindungsstrecke von Sonne und Jupiter bestimmt die Seitenlänge dieses Dreiecks.  $L_4$  befindet sich in Umlaufrichtung von Jupiter vor ihm,  $L_5$  damit hinter ihm.

Da die beiden letztgenannten Lagrangepunkte stabil sind, können sich in ihnen ganze Staubwolken, Kleinkörper und Asteroiden dauerhaft aufhalten. Sie beschreiben aber um diesen Lagrangepunkte eine Umlaufbahn.

Am 24. Januar 2017 befanden sich in  $L_4$  4188 und in  $L_5$  2188 Asteroiden. In  $L_4$  werden als Namen griechische Helden aus Homers Epos *Iliade* gewählt, wobei der Trojaner (624) Hektor eine Ausnahme bildet. In  $L_5$  werden die Namen von trojanischen Helden gewählt, wobei der Trojaner (617) Patroclus eine Ausnahme darstellt.

Zu einer näheren Untersuchung wird der Trojaner (588) Achilles in  $L_4$  gewählt, der als erster Trojaner erst am 22. Februar 1906 von Max Wolf als solcher erkannt wurde. Lagrange konnte sich somit zu Lebzeiten an keinem Trojaner erfreuen, obwohl schon ab 1801 Asteroiden zwischen den Planeten Mars und Jupiter entdeckt worden waren.

## M 1 Aufgaben

1. Es wird der Trojaner (588) Achilles betrachtet. Bestätigen Sie die im Datenblatt für Achilles angegebenen Werte für seine numerische Exzentrizität sowie seine siderische Umlaufzeit. Vergleichen Sie letztere mit der von Jupiter.

Um die Lage der Lagrangepunkte  $L_4$  bzw.  $L_5$  genauer zu untersuchen wird zuerst die Lage des Schwerpunktes  $Z$  des Systems Sonne-Jupiter bestimmt.

2. Berechnen Sie die Lage des Schwerpunktes dieses Systems und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Sonnenradius.

Als überraschendes Ergebnis erhält man, dass sich der gemeinsame Schwerpunkt von Jupiter-Sonne außerhalb der Sonne befindet.

Es bewegt sich Jupiter aber auf einer Ellipsenbahn, daher befindet sich mal weiter von der Sonne entfernt und mal näher.

3. Befindet sich der gemeinsame Schwerpunkt von beiden immer außerhalb der Sonne?

Es ist schon erstaunlich, dass der Sonnenball stets außerhalb seiner Oberfläche um den gemeinsamen Schwerpunkt rotiert.

Wurde bei der bisherigen Überlegung vielleicht etwas vergessen?

Da befindet sich der Planet Saturn. Er besitzt im Sonnensystem die zweitgrößte Masse, dabei ist seine Entfernung von der Sonne etwa doppelt so groß wie von Jupiter.

4. Berechnen Sie den maximalen Einfluss des Saturn auf die Sonne.

Da sich die Ellipsenbahnen von Jupiter und Saturn überlagern, kann sich der gemeinsame Schwerpunkt des Systems Sonne-Jupiter-Saturn mal außerhalb oder auch innerhalb der Sonne befinden.

Man weiß nun, dass sich Sonne und Jupiter auf Kreisbahnen und auch Trojaner auf Kreisbahnen um den Schwerpunkt  $Z$  bewegen.

Gibt man sich Jupiter  $J$  und den Schwerpunkt  $Z$  vor, so zeichnet man den Strahl  $\overline{JZ}$  und auf dem Kreis mit Mittelpunkt  $J$  und Radius  $a$  der großen Halbachse von Jupiter. Man zeichnet nun einen Kreis mit Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $\overline{ZS}$  für die Kreisbahn der Sonne und einen Kreis mit Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $\overline{ZJ}$  für die Kreisbahn von Jupiter. Die Länge der Seite  $\overline{SJ}$ , also die große Halbachse  $a$  von Jupiter bestimmt die Länge des gleichseitigen Dreiecks  $SJL_4(T)$  oder  $SJL_5(T)$ . Die Schnittpunkte des Kreises mit Mittelpunkt  $S$  und Radius  $\overline{SJ}$  und des Kreises mit Mittelpunkt  $J$  und Radius  $\overline{SJ}$  liefern die beide Lagrangepunkte  $L_4$  bzw.  $L_5$ . Der Kreis mit Mittelpunkt  $Z$  und Radius  $\overline{ZL_4}$  ergibt die Bahn des Trojaners. Es ergibt sich Abbildung 2.

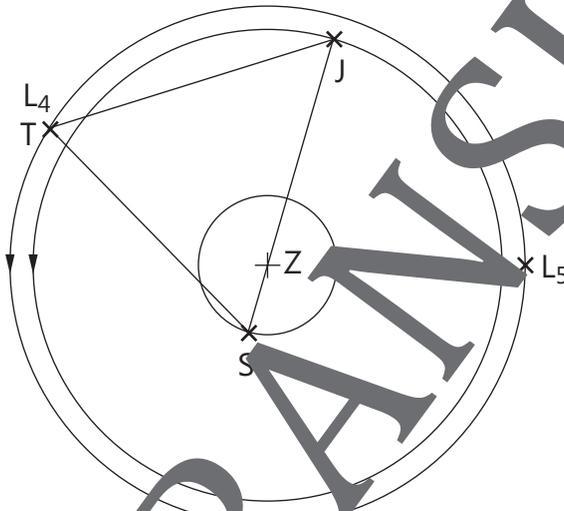


Abbildung 2; Grafik: Prof. Dr. Zettlmeier

5. Bestimmen Sie die Kreisradien sowohl der Sonne als auch Jupiters.

Es ist Ihnen angebracht, die Kraft zu bestimmen, die sowohl Sonne als auch Jupiter auf einen Trojaner ausüben.

6. Berechnen Sie allgemein diejenigen Kräfte, die die Sonne bzw. Jupiter auf einen Trojaner mit der Masse  $m$  ausüben.

Da die Kraft  $\vec{F}_J$  in Richtung von Jupiter und die Kraft  $\vec{F}_S$  in Richtung der Sonne wirkt, kann nun die Gesamtkraft, die auf den Trojaner wirkt, durch Kräfteaddition dieser beiden Kräfte berechnet werden.

7. Berechnen Sie diese Gesamtkraft sowohl in Größe als auch in Richtung.

Es ist nun der Bahnradius  $r = \overline{TZ}$  zu bestimmen.

8. Zeigen Sie, dass für den Bahnradius  $r$  eines Trojaners gilt:

$$r = a \cdot \sqrt{1 - \frac{M_S \cdot M_J}{(M_S + M_J)^2}}.$$



**Hinweis:** Verwenden Sie den Kosinussatz im Dreieck ZST.

9. Berechnen Sie das Verhältnis  $\frac{r}{a}$  in Prozent. Diskutieren Sie die von Ihnen erhaltene Prozentzahl.

Auf Seite 2 steht, dass die Trojaner und der Planet dieselbe Umlaufzeit besitzen.

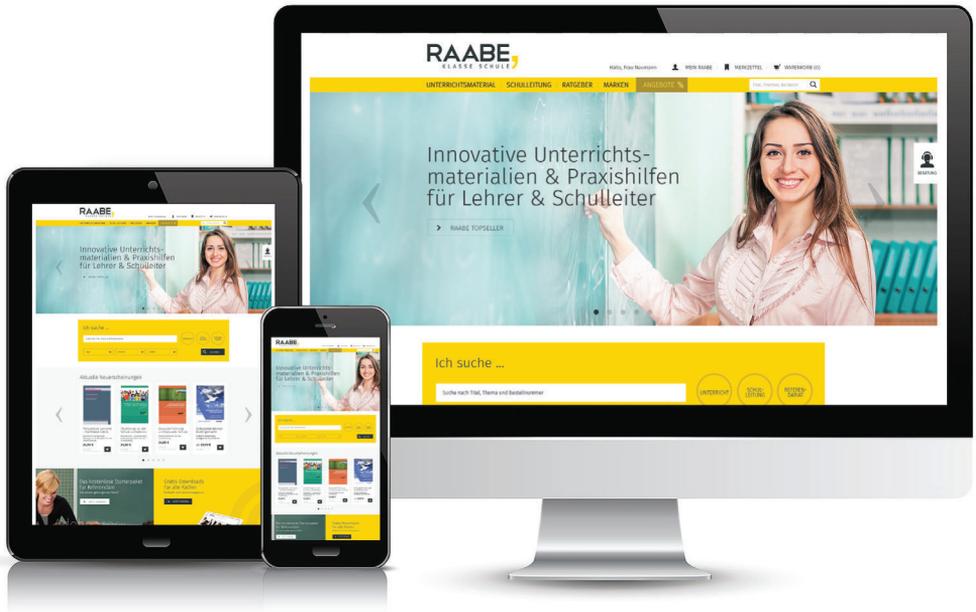
10. Bestimmen Sie allgemein die Winkelgeschwindigkeit eines Trojaners und zeigen Sie, dass sie mit der Winkelgeschwindigkeit von Jupiter übereinstimmt.



**Hinweis:** verwenden Sie die Ergebnisse der Aufgabe 7 und der Aufgabe 8!

11. Der „Mond“ Menoetius des im im Lagrangepunkt  $L_5$  befindlichen Trojaners (617) Patroclus bewegt sich fast perfekt auf kreisförmiger Bahn um ihn. Da beide Himmelskörper etwa gleich groß sind, ist Menoetius kein Mond, sondern (617) Patroclus ein Doppelasteroid. Berechnen Sie die Masse des Doppelasteroiden sowie die Winkelgeschwindigkeit von Menoetius in Grad pro Stunde.

## Der RAABE Webshop: Schnell, übersichtlich, sicher!



### Wir bieten Ihnen:



Schnelle und intuitive Produktsuche



Übersichtliches Kundenkonto



Komfortable Nutzung über  
Computer, Tablet und Smartphone



Höhere Sicherheit durch  
SSL-Verschlüsselung

**Mehr unter: [www.raabe.de](http://www.raabe.de)**