Gerecht teilen – ggT, kgV

Von Florian Borges, Traunstein

© F. Borges

Was hat eine Tafel Schokolade mit einer Schar von Kindern zu tun?

Lassen Sie Ihre Schüler Gemeinsamkeiten der Einmaleins-Reihen erkennen und herausfinden, dass man den ggT und das kgV nicht nur beim Teilen einer Schokoladentafel benötigt.

Klasse	5/6
Dauer	8 Stunden
Inhalt	Gemeinsamkeiten in den Einmaleins-Reihen erkennen; den größten gemeinsamen Teiler (ggT) und das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) kennenlernen; die Primfaktorzerlegung grafisch darstellen; Rechenregeln für die Teilbarkeit von Zahlen erarbeiten
Kompetenzen	Probleme mathematisch lösen (K2), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5); mathematisch kommunizieren (K6)
Ihr Plus	Aufgaben mit Alltagsbezug

Didaktisch-methodische Hinweise

Ob beim Fliesenlegen oder in der Zuckerwürfelproduktion: Mit alltagsnahen Beispielen finden Ihre Schüler einen Bezug zum ggT und kgV. Außerdem lernen Ihre Schüler die Primfaktorzerlegung kennen und setzen diese grafisch um.

Um was geht es inhaltlich?

Die **Teilbarkeit** der natürlichen bzw. ganzen Zahlen (also Division OHNE Rest!) taucht in jedem Mathematiklehrplan der Unterstufe auf. Wenngleich meist im folgenden Schuljahr die Brüche eingeführt und damit das Problem „Division MIT Rest" gelöst wird, spielt dieses zahlentheoretische Grundphänomen in sehr vielen Bereichen eine bedeutende Rolle.

Innermathematisch findet sich schon bei der **Bildung des Hauptnenners** die erste Anwendung – von vielen weiteren (bis hin zu Polynomdivision) einmal ganz abgesehen. Bei Verschlüsselungstechniken kommt den **Primzahlen** eine große Bedeutung zu, deren Notwendigkeit jeder EC-Karten-Besitzer bestätigen kann.

Ziele

Ihre Schülerinnen und Schüler sollen mithilfe dieser Unterrichtsreihe

- alle Teiler einer Zahl finden,
- Primzahlen erkennen,
- ggT und kgV von zwei gegebenen Zahlen mittels Primfaktorzerlegung bestimmen können,
- die einfachen Teilbarkeitsregeln beherrschen.

Auf einen Blick

1.–2. Stunde **Einstieg**

M 1 (Ab) **Das Märchen von König Raffzahn und seinen Reitern**

Gemeinsamkeiten der Einmaleins-Reihen erkennen

M 2 (Ab) **Die Zerlegung in Primfaktoren, ggT und kgV**

Zahlen in ein Produkt zerlegen, den Begriff „Primfaktorzerlegung“ kennenlernen

3.–8. Stunde **Lernzirkel: Primfaktorzerlegung, ggT und kgV anwenden**

M 3 (Ab) **Das Märchen geht weiter – Gemeinsamkeiten erkennen**

Die „teilerfreundlichsten“ Zahlen zwischen 1 und 33 suchen

M 4 (Ab) **Teiler und kgV im Alltag – Übungen**

Eine Tafel Schokolade auf unterschiedliche Art in gleich große Stücke teilen, das kgV der Zahlen 12, 8 und 9 finden

M 5 (Ab) **Fliesenleger in Not! – Die Primfaktorzerlegung anwenden**

Ein Schema zum Lösen von Aufgaben nachvollziehen, die Primfaktorzerlegung anwenden

M 6 (Fo) **Ein grafischer Zugang – Teilerbilder**

Die Zerlegung in Primfaktoren zur Erstellung von Teilerbildern verwenden

M 7 (Ab) **Schnell berechnet – Rechenregeln für die Teilbarkeit**

Gesetze zur Teilbarkeit von natürlichen Zahlen erarbeiten, Einführung von Primzahlenzwillingen und -drillingen

Legende der Abkürzungen

Ab: Arbeitsblatt; **Fo:** Folie

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Je nach Kenntnistand der Schüler können Sie M 1 und M 2 weglassen. Beachten Sie, dass M 1 Voraussetzung von M 3 ist. Beginnen Sie also dann mit den **Anwendungsaufgaben** M 4 und M 5. Die Materialien M 6 und M 7 können Sie unabhängig voneinander ergänzend einsetzen.

Die Lösungen zu den Materialien finden Sie hier.

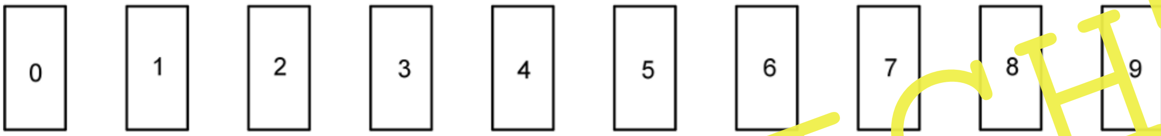
Das Märchen von König Raffzahn und seinen Reitern M 1

Es war einmal ein König. Er lebte sehr verschwenderisch. Dauernd erhöhte er die Steuern, um sich seinen teuren Lebenswandel leisten zu können. Sein Volk hasste ihn von Tag zu Tag mehr. König Raffzahn fürchtete sich zu Recht vor einem möglichen Attentat. Zu seinem Schutz ließ er sich im angrenzenden Meer – weit ab vom Festland – einen Palast auf einer Insel bauen. Die Insel und das Festland waren mit einer Reihe von goldenen Pfosten im Wasser verbunden, deren Abstand so groß war, dass Menschen ihn nicht überspringen konnten. Die wohlgenährten königlichen Rösser dagegen konnten bereits im Alter von einem Jahr von einem Pfosten zum anderen springen.

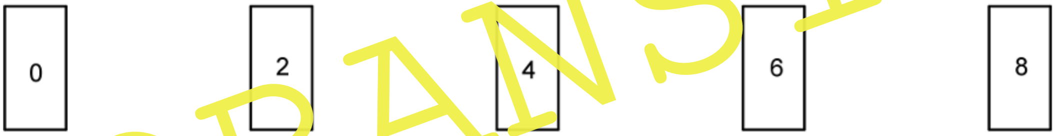
© F. Borges

König Raffzahn

Das Pfostendiagramm für 1-jährige Pferde:



Mit zwei Jahren konnten sie sogar schon einen Pfosten auslassen und gleich zum übernächsten springen.



Durch das gesunde Futter wurde ihre Sprungkraft immer größer. Mit drei Jahren konnten sie gleich auf den jeweils drittnächsten Pfosten springen.

Mit vier Jahren konnten sie auf den viertnächsten Pfosten springen, und so weiter.

Natürlich werden echte Pferde im hohen Alter gebrechlich und ihre Sprungkraft lässt wieder nach, aber in einem Märchen ist das eben nicht zwangsläufig so!

Aufgabe 1

Zeichne ein Pfostendiagramm, das beschreibt, wie die Pferde, die vier und fünf Jahre alt sind, springen.

Tipp: Beginne bei 0. Beende dein Diagramm bei Pfosten 16 für die 4-jährigen Pferde und bei Pfosten 15 für die 5-jährigen Pferde. Achte auf den richtigen Abstand der Pfosten.

Aufgabe 2

Vergleiche die fünf Diagramme. Was fällt dir auf? Diskutiert in der Klasse über eure Erkenntnisse.

Die Zerlegung in Primfaktoren, ggT und kgV M 2

Dass aus zwei Zahlen, die man miteinander multipliziert, ein **Produkt** entsteht, hast du bereits in der Grundschule gelernt. Wie aber sieht der umgekehrte Weg aus?

Nimm einen Stift und einen Zettel zur Hand.

© Pixelio

Stift und Block

Aufgabe 1

Versuche, die Zahl 48 in ein Produkt mit möglichst vielen Faktoren zu zerlegen.

Benutze dabei aber nicht die Zahl 1!

Aufgabe 2

Sortiere die Faktoren der Größe nach und verwende ggf. die ***Potenzschreibweise****. Vergleiche dein Ergebnis mit dem deines Banknachbarn.*

> **Merke**
> Die Faktoren sind alle Primzahlen (sonst könnte man sie weiter zerlegen!).
> Man nennt das Ergebnis die **Primfaktorzerlegung (PFZ)** der Zahl 48.

Aufgabe 3

Zerlege die Zahl 1296 in ein Produkt aus möglichst vielen Faktoren (aber ohne Faktor 1).

Aufgabe 4

Bestimme die PFZ der Zahl 36 000. Überlege dir zusammen mit deinem Banknachbarn ein ***Verfahren*** *zur Bestimmung der PFZ, das bei solchen Zahlen mit Endnullen möglichst wenig Rechenaufwand benötigt.*

Aufgabe 5

Welches ist die kleinste Zahl, die sowohl im 48er- als auch im 72er-Einmaleins vorkommt?

> **Merke**
> Die kleinste Zahl, die in verschiedenen Einmaleins-Reihen vorkommt, nennt man das **kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches)** dieser Zahlen.

Aufgabe 6

Die Zahlen 48 und 72 kommen beispielsweise im Zweier-, Dreier- und Vierer-Einmaleins vor. Finde die größte Zahl, in deren Einmaleins 48 und auch 72 vorkommen.

> **Merke**
> Die größte Zahl, in deren Einmaleins zwei gegebene Zahlen vorkommen, nennt man den **ggT (größten gemeinsamen Teiler)** dieser Zahlen.

Aufgabe 7

Bestimme den ggT und das kgV der Zahlen 36 und 54.

Tipp: Schreibe dir die Einmaleins-Reihen auf.

Das Märchen geht weiter – Gemeinsamkeiten erkennen M 3

Die Hofangestellten von König Raffzahn wollen herausfinden, welches Pferd auf welchen Pfosten springt. Dabei stellen sich ihnen folgende Fragen.

Hilf ihnen!

© Pixelio

Die Hofpferde

Aufgabe 1

Welche Pferde (Alter in Jahren!) springen auf den Pfosten mit der Nummer 6?

Aufgabe 2

Welche Pferde springen jeweils auf die Pfosten mit den Nummern 11, 12 bzw. 13?

Aufgabe 3

Eine bildhübsche 3-jährige Stute hat sich unsterblich in einen temperamentvollen, kräftigen 4-jährigen Hengst verliebt. Auf welchem Pfosten treffen sich die beiden Glückspilze erstmals wieder?

Aufgabe 4

Wo treffen sich ein 6- und ein 9-jähriges Pferd erstmals wieder?

Aufgabe 5

Wo treffen sich ein 12- und ein 18-jähriges Pferd erstmals wieder?

Aufgabe 6

Die Geschwisterpferde Anabel (3 Jahre alt), Bernadette (4 Jahre) und Chrysantheme (5 Jahre) freuen sich auf ein Zusammentreffen. Wo findet dieses erstmals statt?

Aufgabe 7

Wo treffen sich ein 3-, ein 4- und ein 8-jähriges Pferd erstmals wieder?

Aufgabe 8

Wo treffen sich ein 12-, ein 16- und ein 18-jähriges Pferd erstmals und dann weiterhin wieder?

Tipp: Schreib dir die Einmaleins-Reihen untereinander auf.

Lösungen

Lösung (M 1) Das Märchen von König Raffzahn und seinen Reitern

Aufgabe 1

Das Pfostendiagramm für Pferde, die 4 Jahre alt sind:

0	4	8	12	16

Das Pfostendiagramm für Pferde, die 5 Jahre alt sind:

0	5	10	15

Aufgabe 2

Vergleicht man die fünf Sprungbahnen der Pferde, fällt auf, dass einige Zahlen mehrfach auftreten.

Das Pfostendiagramm für die 1-jährigen Pferde:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Das Pfostendiagramm für die 2-jährigen Pferde:

0	2	4	6	8

Das Pfostendiagramm für die 3-jährigen Pferde:

0	3	6	9

Das Pfostendiagramm für die 4-jährigen Pferde:

0	4	8	12	16

Das Pfostendiagramm für die 5-jährigen Pferde:

0	5	10	15

Beobachtungen:

Es gibt Zahlen, die öfters auftreten als andere.

Es gibt Zahlen, die nur auf der ersten Strecke oder auf der Bahn des jeweils so alten Pferdes auftreten. Dabei handelt es sich um **Primzahlen** (bis auf die Zahl „1“, die per Definition keine Primzahl ist). Häufig vorkommende Zahlen sind 8, 6 und 4.

Lösung (M 2) Die Zerlegung in Primfaktoren, ggT und kgV

Aufgabe 1

Eine mögliche Zerlegung ist $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Dabei handelt es sich um die **Primfaktorzerlegung**, weil die Zahl 2 und die Zahl 3 Primzahlen sind. Man nennt die Zahlen in dieser Zerlegung deshalb die **Primfaktoren** der Zahl 48.

Aufgabe 2

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

Aufgabe 3

$1296 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^4$

Aufgabe 4

$36\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

Verfahren:

Die Primfaktorzerlegung von Zahlen mit mehreren Nullen am Ende gestaltet sich folgen-dermaßen: Für jede Null, die an eine Zahl angehängt wird, nehme man das Produkt der Primfaktoren mal 10, also 2 · 5. Das bedeutet in unserem Beispiel, dass man zunächst die PFZ der Zahl 36 bestimmt: 36 = 22 · 32. Man betrachte nun nach dieser Regel:

36 · 10 = 360 = 22 · 32 · 10 = 22 · 32 · 2 · 5 = 23 · 32 · 5.

Die Zahl 36 000 besitzt 3 Nullen, das bedeutet: 36 000 = 22 · 32 · 23 · 53 = 25 · 32 · 53.

Somit wird für jede angehängte Null das Produkt 2 · 5 an die PFZ der Zahl ohne Nullen heranmultipliziert.

Aufgabe 5

Aus der PFZ von $48 = 2^4 \cdot 3$ und $72 = 2^3 \cdot 3^2$ folgt, dass $144 = 2^4 \cdot 3^2 = 48 \cdot 3 = 72 \cdot 2$ die kleinste Zahl im 48er- und 72er-Einmaleins ist, die in beiden Einmaleins-Reihen vorkommt. Somit ist 144 das kgV von 48 und 72.

Aufgabe 6

Die größte Zahl, in deren Einmaleins sowohl 48 als auch 72 vorkommen, ist

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$. Also ist 24 der ggT von 48 und 72.

Aufgabe 7

ggT(36; 54) = 18 kgV(36; 54) = 108