Form und Raum

Trigonometrie – Sinus, Kosinus und Tangens in Dreiecken selbstentdeckend kennenlernen

Nach einer Idee von Nicole Müller
Illustrationen von Wolfgang Zettlmeier

© marekuliasz/iStock/Getty Images Plus

Sie unterrichten eine 9. oder 10. Klasse und Ihre Schülerinnen und Schüler sollen die trigonometrischen Beziehungen Sinus, Kosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck kennenlernen? Bringen Sie Ihrer Klasse mithilfe dieses Beitrags die Grundlagen der Trigonometrie näher. Selbstentdeckendes Lernen, verlinkte Erklärvideos sowie der Einsatz von LearningApps sind Bestandteile dieses Beitrags und sollen Ihre Schülerinnen und Schüler befähigen, das Material möglichst selbstständig zu bearbeiten.

KOMPETENZPROFIL

LearningApps - interaktive Lernbausteine

Klassenstufe:	9/10
Dauer:	7 Unterrichtsstunden (Minimalplan 5)
Inhalt:	Sinus, Kosinus, Tangens, trigonometrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Mb: Merkblatt; Sp: Spiel

Einstieg/Grundlagen

M 1 (Ab) Gegenkathete, Ankathete, Hypotenuse – wichtige Begriffe im rechtwinkligen Dreieck

Erarbeitung

M 2 (Ab) Sinus, Kosinus und Tangens – Kärtchen
M 3 (Ab) Sinus, Kosinus und Tangens

Ergebnissicherung

M 4 (Mb) Sinus, Kosinus und Tangens auf einen Blick

Übung

M 5 (Ab) Umstellen der Formel anhand des Kosinus
M 6 (Ab) Leistungsdifferenzierte Aufgaben zum Sinus, Kosinus und Tangens
M 7 (Ab) Anwendungsaufgaben zum Sinus, Kosinus und Tangens

Spielerische Übung

M 8 (Sp) Memory zu den Formeln des Sinus, Kosinus und Tangens

Lösungen

Die Lösungen zu den Materialien finden Sie ab Seite 16.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für fünf Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1 (Ab) Gegenkathete, Ankathete, Hypotenuse – wichtige Begriffe im rechtwinkligen Dreieck
M 2 (Ab) Sinus, Kosinus und Tangens – Kärtchen
M 3 (Ab) Sinus, Kosinus und Tangens
M 4 (Mb) Sinus, Kosinus und Tangens auf einen Blick
M 5 (Ab) Umstellen der Formel anhand des Kosinus
M 6 (Ab) Leistungsdifferenzierte Aufgaben zum Sinus, Kosinus und Tangens

M 1 Grundlagen: Gegenkathete, Ankathete, Hypotenuse – wichtige Begriffe im rechtwinkligen Dreieck

Aufgabe 1

a) **Lies** den folgenden Text.

> Wir wollen uns in dieser Einheit mit der Trigonometrie beschäftigen. „*Trigonometrie*" kommt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie „*Dreiecksmessung*". Es geht also um das Dreieck. Genauer gesagt, geht es um ein Dreieck, in dem einer der Winkel genau 90° groß ist, dem sogenannten rechtwinkligen Dreieck. In diesem besonderen Dreieck haben auch die Seiten besondere Namen: **Hypotenuse** nennt man die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt. **Katheten** nennt man die Schenkel des rechten Winkels, also die Seiten, die den rechten Winkel „einschließen". Wenn man sich Katheten in einer Beziehung zu einem Winkel betrachtet, kann man diese auch noch einmal näher benennen: Die Kathete, die einem Winkel gegenüberliegt, nennt man **Gegenkathete** des Winkels (kurz: Gegenkathete von …). Die Kathete, welche mit der Hypotenuse den Winkel bildet, nennt man **Ankathete** des Winkels (kurz: Ankathete von …). Je nachdem, auf welchen Winkel man sich bezieht, kann eine Kathete also An- oder Gegenkathete sein.

Du weißt nicht mehr, wie man ein Dreieck beschriftet? Dann schaue dieses Video an:

https://raabe.click/ma-Dreicksbeschriftung

b) **Zeichne** ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$).

c) **Beschrifte** die Ecken (A, B, C) und Winkel (α, β, γ). Die Seiten kannst du mit kleinen Buchstaben entsprechend der gegenüberliegenden Eckpunkte benennen (a, b, c) oder aber du gibst sie mithilfe der Eckpunkte an, die sie begrenzen ($\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$). Du solltest aber beide Beschriftungsarten beherrschen. Bei letzterem darfst du den Strich über den Buchstaben nicht vergessen.

d) **Beschrifte** die Seiten zudem mit den Begriffen aus dem Text (Hypotenuse, Ankathete von α, Gegenkathete von α).

e) **Ergänze:** Ankathete von β = ______________________________ von α,
Gegenkathete von β = __________________________ von α

Aufgabe 2

Vergleiche Aufgabe 1 mit der Person neben dir.

Aufgabe 3

Du fühlst dich noch nicht sicher mit den Begriffen? Dann kannst du das mit einer LearningApp noch etwas **üben**. Dazu musst du mit einem Tablet oder Smartphone den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den nachfolgenden Link **aufrufen:** *https://learningapps.org/view18500147*

Aufgabe 8

Kann man das auch auf den Winkel β übertragen? **Führt** die Aufgaben 3–5 erneut **durch**. Dieses Mal allerdings mit dem von euch in Aufgabe 2 errechneten Winkel β.

Hinweis: Denkt daran, dass die Ankathete bzw. Gegenkathete von β nicht die gleiche Seite ist wie die von α.

Aufgabe 9

Stellt in eurer Gruppe eine **allgemeine Regel** für das Berechnen von Sinus, Kosinus und Tangens **auf. Tragt** dazu die Wörter aus dem Kasten in die richtige Lücke des Lückentexts **ein.**
Alternativ könnt ihr den Lückentext auch digital ausfüllen. Dazu müsst ihr mit einem Tablet oder Smartphone den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den nachfolgenden Link **aufrufen**:
https://learningapps.org/view18500259

Gegenkathete des Winkels; Gegenkathete des Winkels; Ankathete des Winkels; Ankathete des Winkels; Hypotenuse; Hypotenuse

Der **Sinus** eines Winkels berechnet sich als Quotient aus der

______________________________ durch die.

______________________________ .

Der **Kosinus** eines Winkels berechnet sich als Quotient aus der

______________________________ durch die.

______________________________ .

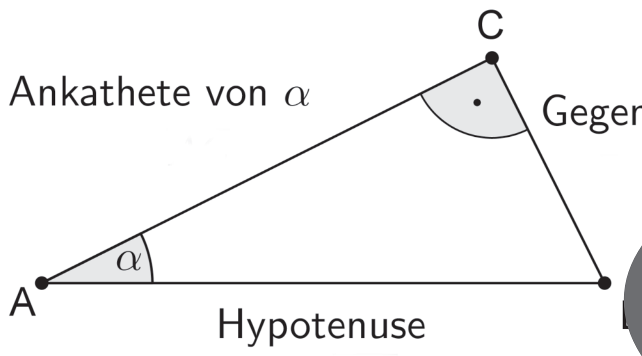
Der **Tangens** eines Winkels berechnet sich als Quotient aus der

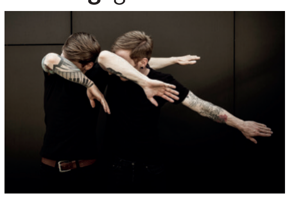
______________________________ durch die.

______________________________ .

M4

Ergebnissicherung: Sinus, Kosinus und Tangens auf einen Blick



Sinus	Kosinus	Tangens
$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$	$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$	$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$
Eselsbrücke: **Sin**upret **ge**gen **H**usten.	*Eselsbrücke:* **Cos**ima **a**rbeitet **h**art.	*Eselsbrücke:* **Tan**zen **g**egen **A**kne.
		

© BrianAJackson/iStock/Getty Images Plus; © colourbox; © 35007/E+

Hinweis: Du kannst dir auch selbst eine Eselsbrücke überlegen.

Achtung

1. Sinus, Kosinus und Tangens können nur im Zusammenhang mit einem **rechtwinkligen** Dreieck angewendet werden.
2. Die Formeln kann man auch für den Winkel β anwenden. Dann muss man nur daran denken, dass sich auch die Beschriftung in der Zeichnung ändert.

Tipp

Du willst das alles noch mal erklärt bekommen?
Dann schau dir gerne eins der folgenden Erklärvideos an oder auch beide.

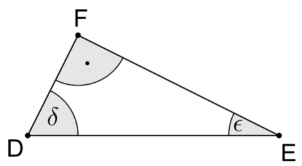
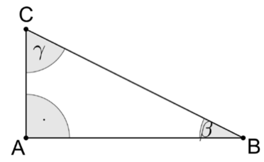
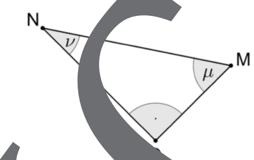
https://raabe.click/ma-Trigonometrie-1	https://raabe.click/ma-Trigonometrie-2

Übung: Leistungsdifferenzierte Aufgaben zum Sinus, Kosinus und Tangens

M 6

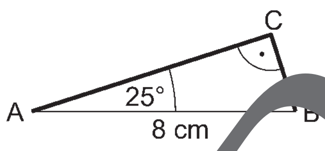
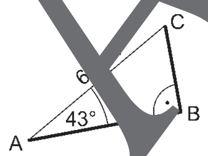
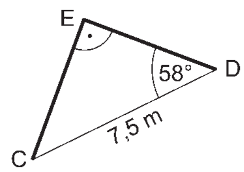
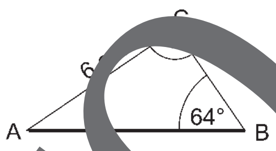
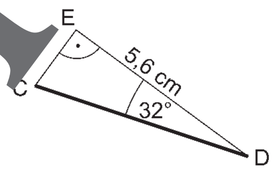
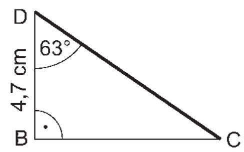
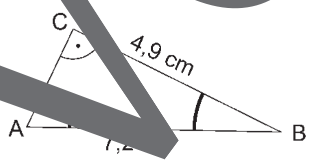
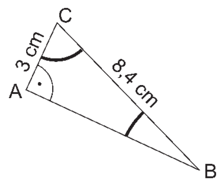
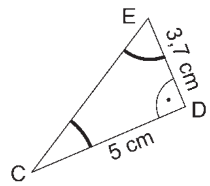
Aufgabe 1

Gib jeweils den Sinus, Kosinus und Tangens der Winkel **an.**

		
$\sin\delta = \frac{\quad}{\overline{DE}}$, $\sin\varepsilon = \frac{\quad}{\overline{DE}}$ $\cos\delta = \frac{\overline{DF}}{\quad}$, $\cos\varepsilon = \text{—}$ $\tan\delta = \text{—}$, $\tan\varepsilon = \frac{\overline{DF}}{\quad}$	$\sin\beta = \text{—}$, $\sin\gamma = \text{—}$ $\cos\beta = \text{—}$, $\cos\gamma = \text{—}$ $\tan\beta = \text{—}$, $\tan\gamma = \text{—}$	

Aufgabe 2

Berechne die dick markierten Größen. **Runde** auf zwei Nachkommastellen genau.

a) 	b) 	c) 
d) 	e) 	f) 
g) 	h) 	i) 

Grafiken: Wolfgang Zettlmeier

M 7 Übung: Anwendungsaufgaben zum Sinus, Kosinus und Tangens

Die Dachbalken des Fachwerkhauses haben einen Neigungswinkel von 48°. Das Dach ist 5 m hoch.

a) **Berechne** die Länge des Sparrens (20 cm stehen über).

b) **Berechne** die Breite des Hauses.

Die Baldwin Street in Neuseeland hat eine Steigung von 35 %.

a) **Berechne** den Steigungswinkel.

b) Die Straße ist 350 m lang. Welchen Höhenunterschied hat die Straße? **Berechne**.

Der Sparren des Giebels des Parthenon in Athen war 14,59 m lang und der Giebel 3,46 m hoch.

a) **Berechne** den Neigungswinkel des Giebels.

b) **Berechne** die Breite des Giebels.

Eine Terrasse braucht ein Gefälle von 2 %, damit der Regen abfließen kann.

a) **Berechne** den Neigungswinkel.

b) Der Platz, auf dem die Terrasse gebaut werden soll, ist 4 m · 4 m. Wie viele St[illegible]platten braucht man, wenn eine 40 cm [illegible] groß ist? **Berechne.**

Eine Gartenhütte soll 2,70 m breit sein und das Dach soll einen Neigungswinkel von 35° haben.

a) **Berechne** die Höhe des Dachs.

b) **Berechne** die Länge eines Dachsparrens. (10 cm Überstand)

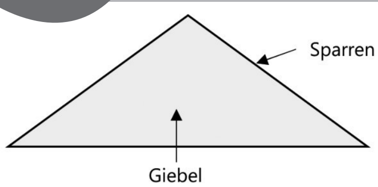
[illegible] Eisenbahngleis darf maximal eine Steigung von 25 ‰ haben.

a) **Berechne** den Steigungswinkel.

b) Die Bahn soll einen Höhenunterschied von 50 m überwinden. Wie lange wird die Schienenstrecke? **Berechne.**

Abb. von links nach rechts und von oben nach unten: © ste[illegible]ecoleimages/E+; © Wikimedia Commons; © MinistryOfJoy/iStock/Getty Images Plus; © nicolamargaret/E+; © [illegible]epblue4you/E+; © [illegible]urbox

Tipp



4 % Steigung bedeutet, dass auf 100 m Länge der Höhenunterschied 4 m beträgt.
4 ‰ Steigung bedeutet, dass auf 1000 m Länge der Höhenunterschied 4 m beträgt.

Spielerische Übung: Memory zu den Formeln des Sinus, Kosinus und Tangens

M 8

Spiel das Memory nach den gewohnten Regeln. **Finde** die richtigen Paare: Welche Formel gehört zu was? Damit du richtig spielen kannst, musst du zunächst die Kärtchen **ausschneiden**.

$\sin\alpha$	$\dfrac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$	$\sin\beta$	$\dfrac{\text{Gegenkathete von }\beta}{\text{Hypotenuse}}$
$\cos\alpha$	$\dfrac{\text{Ankathete von }\alpha}{\text{Hypotenuse}}$	$\cos\beta$	$\dfrac{\text{Ankathete von }\beta}{\text{Hypotenuse}}$
$\tan\alpha$	$\dfrac{\text{Gegenkathete von }\alpha}{\text{Ankathete von }\alpha}$	$\tan\beta$	$\dfrac{\text{Gegenkathete von }\beta}{\text{Ankathete von }\beta}$

Alternativ kannst du dieses **Memory** auch digital spielen. Dazu musst du mit einem Tablett oder Smartphone den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den nachfolgenden Link **aufrufen** *https://learningapps.org/vie[illegible]00353*

Teste dein Wissen!

Du hast noch nicht genug geübt oder du willst testen, wie gut du jetzt alles weißt? Spiele noch mal alle Apps dieser Einheit durch. Dazu musst du mit einem Tablet oder Smartphone den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den nachfolgenden Link **aufrufen** *https://learningapps.org/view18500951*
Hier sind noch mal alle Apps dieser Einheit übersichtlich zusammengestellt.