

## IV.20

### Daten und Zufall

# Der Erwartungswert und das faire Spiel – eigenständiges Lernen fördern

Nach einer Idee von Alessandro Totaro

Illustrationen von Oliver Wetterauer



© Bet\_Noire/iStock/Getty Images Plus

Sie wollen im Mathematikunterricht der 10. Klasse die Leitidee Daten und Zufall gewinnbringend unterrichten? Mit diesem Beitrag lernen Ihre Schülerinnen und Schüler die Kenngröße des Erwartungswertes kennen, ihn zu berechnen und interpretieren bzw. reflektieren Daten unter dessen Verwendung. Durch eine kleinschrittige Erarbeitung und Strategiekarten soll eigenständiges Arbeiten ermöglicht werden. Durch abwechslungsreiche Aufgaben wird das Thema für die Lernenden begreifbar gemacht.

#### KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	9/10
Dauer:	2–3 Unterrichtsstunden
Inhalt:	Erwartungswert, faires Spiel, Wahrscheinlichkeitsrechnung
Kompetenzen:	mathematische Probleme lösen (K2); mathematisch modellieren (K3); mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

## Auf einen Blick

Bi = Bildimpuls, Ab = Arbeitsblatt, Mb = Merkblatt, Sp = Spiel

### Einstieg

M 1 (Bi) Glücksspiele – Gewinn oder Verlust?

### Erarbeitung

M 2 (Ab) Was bedeutet Erwartungswert und faires Spiel?

### Ergebnissicherung

M 3 (Mb) Das bedeutet Erwartungswert und faires Spiel

### Übung

M 4 (Ab) Erste Grundaufgaben

M 5 (Ab) Grundaufgaben lösen

M 6 (Ab) Aufgaben vertiefen und spielerisch bearbeiten

M 7 (Ab) Wähle nach deinem Können

### Spielerische Übung

M 8 (Sp) Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeit – ein Memory



# M 1 Einstieg: Glücksspiele – Gewinn oder Verlust?



Grafik: Oliver Wetterauer

## Aufgabe

a) **Betrachte** das Bild und **beschreibe** die Spiele.

---

---

---

---

b) Kannst du mit einem dieser Spiele dein Taschengeld aufwerten? Wenn ja, mit welchem? **Begründe** deine Entscheidung.

---

---

c) Von was ist es abhängig, ob du bei einem Gewinnspiel Gewinn oder Verlust machst? **Nenne** die Faktoren.

---

---

M 3

# Ergebnissicherung: Das bedeutet Erwartungswert und faires Spiel!



Du brauchst nochmal eine kurze Erklärung? Dann schau dir dieses Video an:

<https://raabe.click/ma-Erwartungswert>

### Erwartungswert

Den **Erwartungswert** (E) kann man als langfristig zu erwartenden, durchschnittlichen Gewinn/Verlust pro Spiel interpretieren.

Die Formel zur Berechnung des Erwartungswertes lautet:

$$E(X) = P_1 \cdot (a_1 - e) + P_2 \cdot (a_2 - e) + \dots + P_n \cdot (a_n - e)$$

*E = Erwartungswert; P = Wahrscheinlichkeit; a = Ausschüttung; e = Einsatz*

### Faires Spiel

Ein Spiel heißt **fair**, wenn sich auf lange Sicht Einsatz und Gewinn ausgleichen.

Bei einem fairen Spiel ist der Erwartungswert 0:

$$E(X) = P_1 \cdot (a_1 - e) + P_2 \cdot (a_2 - e) + \dots + P_n \cdot (a_n - e) = 0$$

*E = Erwartungswert; P = Wahrscheinlichkeit; a = Ausschüttung; e = Einsatz*



### Strategie-Tippkarte: Berechnung des Erwartungswerts

- Verwende eine **Tabelle**, um dir einen Überblick zu verschaffen:
 

Ereignis	Einsatz (e)	Ausschüttung (a)	Wahrscheinlichkeit (P)
- Denke dir die Zufallsvariable X. Überlege dir hierzu, ob du den Gewinn/Verlust aus der Sicht des **Anbieters** oder der **Kunden** berechnen willst.
 

**X = Gewinn/Verlust für Anbieter** oder **X = Gewinn/Verlust für Kunden**
- Wende nun die Formel für den Erwartungswert an.
  - Falls X = Gewinn/Verlust für Kunden  
 $\Rightarrow E(X) = P_1 \cdot (a_1 - e) + P_2 \cdot (a_2 - e) + \dots + P_n \cdot (a_n - e)$   
 Versetze dich in die **Kunden**: für dich wäre der Einsatz etwas **Negatives** (du gibst Geld aus); die Ausschüttung etwas **Positives** (du bekommst Geld).
  - Falls X = Gewinn/Verlust für Anbieter  
 $\Rightarrow E(X) = P_1 \cdot (-a_1 + e) + P_2 \cdot (-a_2 + e) + \dots + P_n \cdot (-a_n + e)$   
 Versetze dich in den **Anbieter**: für dich wäre der Einsatz etwas **Positives** (du bekommst Geld); die Ausschüttung etwas **Negatives** (du gibst Geld aus).
- Denke daran, dass dieser Wert den langfristigen Gewinn oder Verlust pro Spiel angibt.

## Übung: Erste Grundaufgaben

M 4

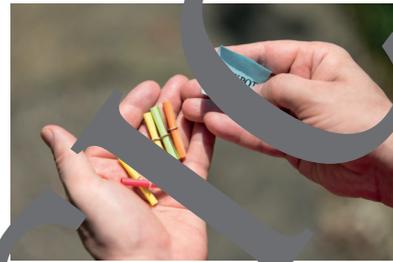
Auf einem Schulfest werden zwei Tombolas von verschiedenen Klassen veranstaltet. Doch werden sich die Gewinnspiele lohnen? Finde es heraus.

Die **Klasse 9a** organisiert beim Sommerfest die folgende Tombola.

Ein Los kostet 2,00 €. Insgesamt gibt es 550 Lose und den folgenden Gewinnplan:

Los	Auszahlung
500 Nieten	0,00 €
40 Kleingewinne	10,00 €
10 Hauptgewinne	50,00 €

Die **Parallelklasse 9b** bietet auch eine Tombola an: Die Klasse läuft mit 10 grünen Eimern über den Schulhof. Sie versprechen, dass sich in jedem Ei ein Los befindet. Insgesamt befinden sich 1000 Lose in den 10 Eimern. Ein Los kostet 1 €.



© miriam-deutsch/Getty Images Plus

### Beispielaufgabe

- Lies den Text oben im Kasten zur Klasse 9a.
- Gib jeweils die Wahrscheinlichkeit für eine Niete, einen Kleingewinn und einen Hauptgewinn an.
- Berechne den Erwartungswert aus Sicht der Klasse 9a.
- Beurteile, ob das Spiel fair ist.

Lösung:

Ereignis	Einsatz	Ausschüttung	Wahrscheinlichkeit (P)
Niete	2,00 €	0,00 €	$\frac{500}{550}$
Kleingewinn	2,00 €	10,00 €	$\frac{40}{550}$
Hauptgewinn	2,00 €	50,00 €	$\frac{10}{550}$

c)  $X = \text{Gewinn/Verlust für die Klasse 9a}$

$$E(X) = \frac{500}{550} \cdot 2,00 \text{ €} + \frac{40}{550} \cdot (-8,00 \text{ €}) + \frac{10}{550} \cdot (-48,00 \text{ €}) \approx \underline{0,36 \text{ €}}$$

**Antwort:** Die Klasse 9a macht langfristig pro Spiel einen Gewinn von 0,36 €.

d) Nein, das Spiel ist nicht fair, da der Erwartungswert nicht 0 ist.

### Aufgabe 1

- Lies den Text oben im Kasten zur Parallelklasse 9b.
- Gib jeweils die Wahrscheinlichkeit für eine Niete und einen Hauptgewinn an.
- Berechne den Erwartungswert aus Sicht der Kunden.
- Beurteile, ob das Spiel fair ist.

## M 7

## Übung: Wähle nach deinem Können

**Aufgabe**

Eine Schulklasse bietet eine Tombola beim Schulfest an. Dazu hat sie insgesamt 500 Lose vorbereitet. Davon sind 100 Losnummern Kleingewinne von 10 € und 10 Lose sind Hauptgewinne mit 50 €. Jedes Los kostet 5 €.

- Berechne** den Erwartungswert aus Sicht der Klasse.
- Beurteile**, ob es sich um ein faires Spiel handelt.



© Image Source

**Aufgabe**

Eine Schulklasse bietet eine Tombola beim Schulfest an. Dazu hat sie insgesamt 500 Lose vorbereitet. Davon sind 100 Losnummern Kleingewinne von 10 € und 10 Lose sind Hauptgewinne mit 50 €. Jedes Los kostet 5 €.

- Berechne** den Erwartungswert aus Sicht der Klasse.
- Berechne**, um wie viel Prozent sich der Erwartungswert erhöhen würde, wenn man die Auszahlung bei einem Hauptgewinn auf 40 € senken würde.



© Image Source

**Aufgabe**

Eine Schulklasse bietet eine Tombola beim Schulfest an. Dazu hat sie insgesamt 500 Lose vorbereitet. Davon sind 100 Losnummern Kleingewinne von 10 € und 10 Lose sind Hauptgewinne mit 50 €. Jedes Los kostet 5 €.

- Berechne** den Erwartungswert aus Sicht der Klasse.
- Berechne**, wie man die Auszahlung bei einem Hauptgewinn verändern müsste, wenn man den langfristigen Gewinn pro Spiel um 20 % steigern möchte.



© Image Source

## Spielerische Übung: Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeit – ein Memory

M 8



**Spielt** das Memory nach den gewohnten Regeln. Zu jedem dick gedruckten Wort gehört eine nicht dick gedruckte Erklärung. **Schneidet** dazu zunächst die Kärtchen aus.

Dieses liegt vor, wenn man z. B. eine Kugel aus einer Urne zieht	<b>P(A)</b>	Dies ist das Ereignis A.	<b>Ereignis</b>	Dies gilt, wenn der Erwartungswert null ergibt.
<b><math>\bar{A}</math></b>	Man zieht eine Kugel und legt diese wieder zurück.	<b>Einstufiges Zufallsexperiment</b>	<b>Ziehen ohne Zurücklegen</b>	<b>A</b>
<b>Ziehen mit Zurücklegen</b>	Es beschreibt das Ergebnis eines Zufallsexperiments.	<b>Zufallsexperiment</b>	Dies ist das Gegenereignis von A.	Dies ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A.
Dieses liegt vor, wenn man z. B. zwei Kugeln aus einer Urne zieht.	<b>Erwartungswert</b>	Man zieht eine Kugel und legt sie nicht zurück.	<b>Faires Spiel</b>	Er gibt an, wie viel Gewinn man langfristig pro Spiel erzielt.

© RAABE 2021

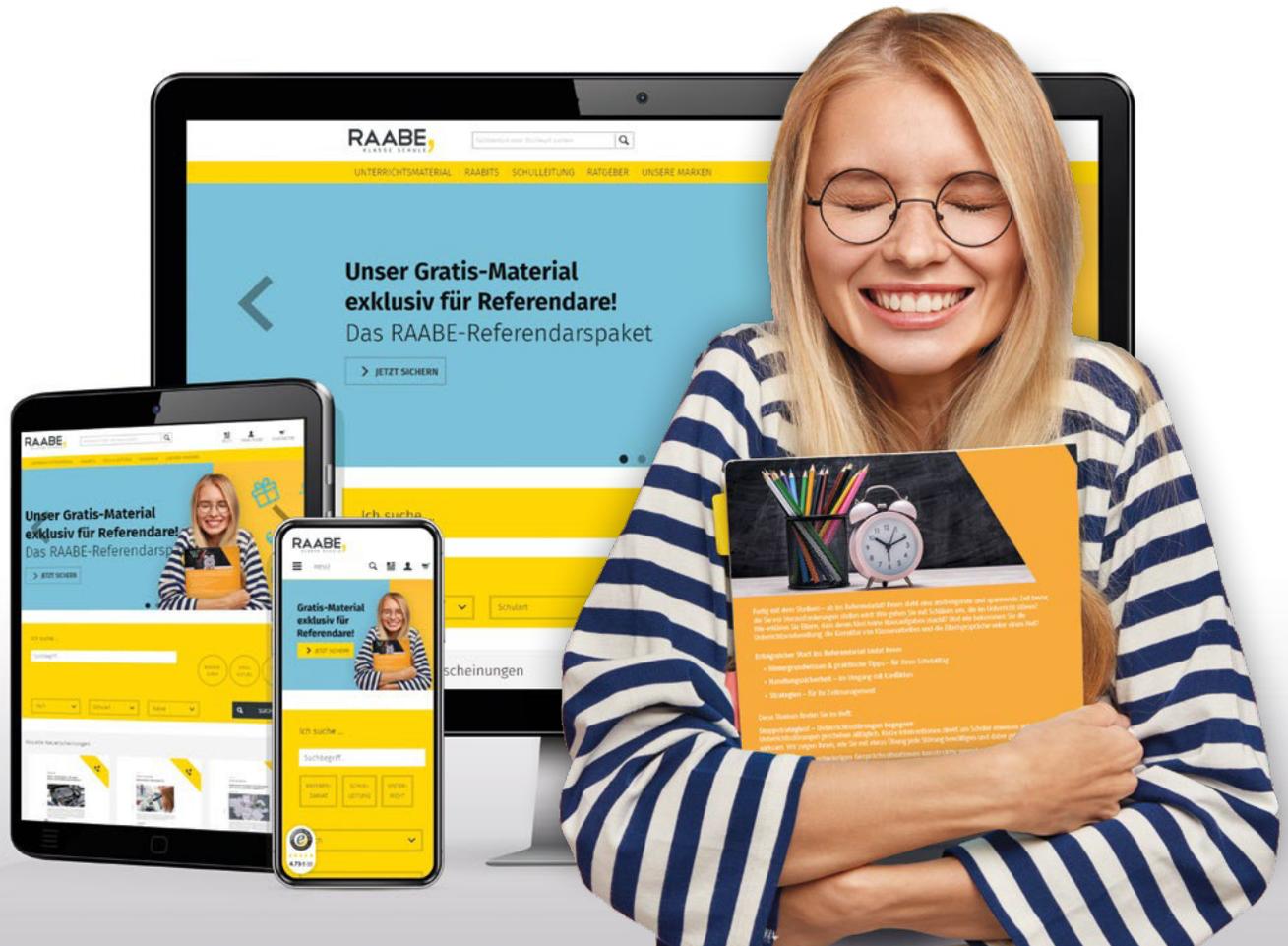
Alternativ könnt ihr das Memory digital spielen. Dazu müsst ihr mit einem Tablet oder Smartphone den nebenstehenden QR-Code **scannen** oder den nachfolgenden Link **aufrufen** <https://learningapps.org/view18361192>



VORANSICHT

# Sie wollen mehr für Ihr Fach?

## Bekommen Sie: Ganz einfach zum Download im RAABE Webshop.



**Über 4.000 Unterrichtseinheiten**  
sofort zum Download verfügbar



**Sichere Zahlung** per Rechnung,  
PayPal & Kreditkarte



**Exklusive Vorteile für Abonnent\*innen**

- 20% Rabatt auf alle Materialien für Ihr bereits abonniertes Fach
- 10% Rabatt auf weitere Grundwerke



**Käuferschutz** mit Trusted Shops



Jetzt entdecken:  
**www.raabe.de**