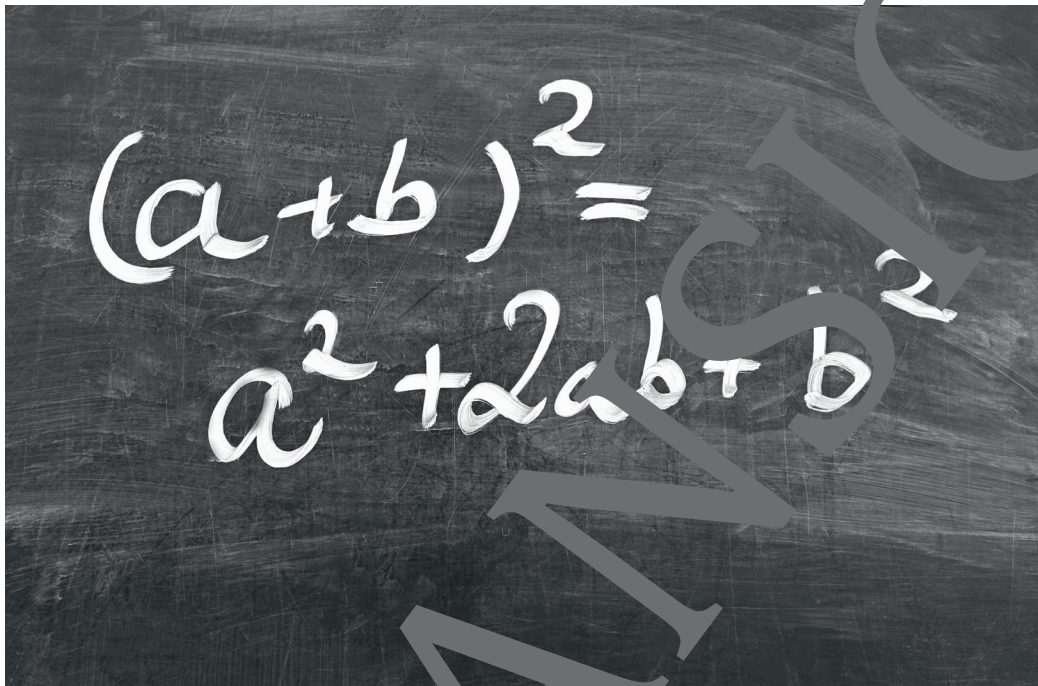


Binomische Formeln algebraisch und geometrisch betrachtet

Diana Hauser



© Gabriele Grass/iStock/Getty Images Plus

Mit Variablen zu rechnen stellt viele Lernende vor große Herausforderungen. Wenn die binomischen Formeln eingeführt werden, sitzen oft die Grundlagen hierfür nicht mehr. Daher gliedert sich diese Unterrichtseinheit in drei Teile: im ersten Teil wird das Quadrieren von Produkten und Brüchen wiederholt, zudem das Auflösen von einem Minus vor der Klammer sowie das Multiplizieren zweier Terme, die in Klammern stehen. Sitzen diese Grundlagen, können Sie im zweiten Teil die binomischen Formeln zur Vereinfachung des Multiplizierens zweier Klammern einführen. In Teil drei werden die binomischen Formeln geometrisch hergeleitet. Die beigefügte PowerPoint-Präsentation unterstützt das Verstehen und Erlernen der Teile eins und zwei begleitend und visuell.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:

8/9

Inhalt:

8 Unterrichtsstunden

Kompetenzen:

Ausmultiplizieren, Minus vor Klammer, Quadrieren, binomische Formeln

Probleme mathematisch lösen (K2), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)



Auf einen Blick

Planung für 8 Stunden

Einstieg – Teil 1

M 1	Mathematische Grundlagen – Teste dich!
M 2	Ein Quadrat an der Klammer
M 3	Ein Minus vor der Klammer
M 4	Klammern ausmultiplizieren

Erarbeitung – Teil 2

M 5	Die drei binomischen Formeln
M 6	Die 1. binomische Formel
M 7	Die 2. binomische Formel
M 8	Die 3. binomische Formel
M 9	Vermischte Aufgaben

Erarbeitung – Teil 3

M 10	Geometrische Herleitung der binomischen Formeln
------	---

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für vier Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1	Mathematische Grundlagen – Teste dich!
M 5	Die drei binomischen Formeln
M 6	Die 1. binomische Formel
M 7	Die 2. binomische Formel
M 8	Die 3. binomische Formel
M 9	Vermischte Aufgaben

M 1

Mathematische Grundlagen – Teste dich!

Das solltest du für den Umgang mit binomischen Formeln sicher beherrschen:

Ein Quadrat an einer Klammer
– was passiert?

Minus vor der Klammer
– was passiert?

Klammern multiplizieren
– was passiert?

Grafik: Diana Hauser

Aufgabe 1

Multipliziere aus.

a) $(dc)^2 =$ _____ d) $(-dc)^2 =$ _____

b) $(2a)^2 =$ _____ e) $(\frac{1}{2}f)^2 =$ _____

c) $(3bd)^2 =$ _____ f) $(-3b)^2 =$ _____

Aufgabe 2

Löse die Klammern auf und fasse – falls möglich – zusammen.

a) $-(d + c) =$ _____

b) $-(a - b) =$ _____

c) $-(2 + x - a) =$ _____

d) $-(-3y)^2 =$ _____

e) $-5 + (-5a - 1) =$ _____

f) $-(4e - 1) - (2e + 1) =$ _____

Aufgabe 3

Multipliziere aus.

a) $(2 + a)(a + b) =$ _____

b) $(b + c)(a - c) =$ _____

c) $(x - a)(2 + a) =$ _____

d) $(-3 - y)(3 - 4y) =$ _____

e) $(a - 1)(2 - 3c) =$ _____

f) $-(2 + e)(5e + \frac{5}{2}) =$ _____

M 4

Klammern ausmultiplizieren



$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

Dies gilt in gleicher Weise auch für Differenzen, z. B.:

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

Aufgabe 1

Welches Vorzeichen hat das Ergebnis? Verbinde.

$(+2)(-a) = ?$

$(-a)(+2) = ?$

$(-2)(-a) = ?$

$(+2)(+a) = ?$



$(-a) \cdot b = ?$

$a \cdot b = ?$

$(-a)(-b) = ?$

$a \cdot (-b) = ?$

Aufgabe 2

Fülle die Lücken mit + oder -.

$a) (2 + a)(3 + b) = \square 6 \square 2b \square 3a \square 2$

$b) (c + d)(a - b) = \square ca \square cb \square da \square db$

$c) (-4 + s)(2 - t) = \square 8 \square 4t \square 2s \square st$

$d) (5 + e)(-e - f) = \square 5e \square 5f \square e^2 \square ef$

Aufgabe 3

Fülle die Lücken mit Zahlen und Variablen.

$a) (4 - a)(2 + d) = \square + \square - \square - \square$

$b) (v - w)(x - y) = -\square - \square + \square + \square$

$c) (-3 + e)(-3 + d) = \square - \square - \square + \square$

$d) (a + b)(a + 4) = \square + \square + \square + \square$

Aufgabe 4
Multipliziere aus.

$a) (a + 5)(c - 1) =$

$b) (-3 + c)(d - 2) =$

$c) (-f - g)(g - 2) =$

$d) (x - 1)(x - 3) =$

Aufgabe 5

Multipliziere aus und fasse zusammen.

$a) (4 - a)(a - 2) =$

$b) (x + 3)(6 - x) =$

$c) (a + b)(a - b) =$

$d) (-y - 2)(2 + y) =$

M 5



Die drei binomischen Formeln

Jetzt bist du gerüstet für die binomischen Formeln

1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. binomische Formel

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Achte immer genau darauf, wo das a und das b auftauchen.
Auch hier gilt: Manchmal musst du um a bzw. b eine Klammer setzen.

Mit den mathematischen Grundlagen aus M 1–M 4 kannst du alle linken Seiten der drei binomischen Formeln schon berechnen, ohne die Formeln anzuwenden.

Aufgabe 1

Multipliziere aus und fasse zusammen.

- a) $(a + b)(a + b) =$ _____
 b) $(a - b)(a - b) =$ _____
 c) $(a + b)(a - b) =$ _____

Aufgabe 2

Vergleiche deine Ergebnisse aus Aufgabe 1 mit den Formeln aus dem Kasten.

Was fällt dir auf?

Die binomischen Formeln helfen dir, Klammern schneller zu multiplizieren.

Vor allem wenn a und b komplexere Terme sind, lohnt es sich, die Formeln anzuwenden.

Die 1. binomische Formel

M 6

1. binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Aufgabe 1

Male in der Gleichung alle Stellen mit rot **an**, die dem **a** in der 1. binomischen Formel entsprechen. Und alle Stellen mit blau, die dem **b** entsprechen.

a) $(a + x)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot x + x^2$

c) $(3 + y)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot y + y^2$

b) $(f + 4)^2 = f^2 + 2 \cdot f \cdot 4 + 4^2$

d) $(t + 0,5)^2 = t^2 + 2 \cdot t \cdot 0,5 + 0,5^2$

Aufgabe 2

Vervollständige. Streiche die Terme **durch**, die du schon verwendet hast.

$$d \cdot 3 \quad h \cdot 2 \quad 2^2 \quad g^2 \quad 2 \cdot e \quad d^2 \quad h^2 \quad 3^2 \quad e^2 \quad a^2 \quad g \cdot b \quad 2^2$$

a) $(g + h)^2 = g^2 + 2 \cdot g \cdot h + \underline{\hspace{2cm}}$

e) $(h + 2)^2 = h^2 + 2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} + 2^2$

b) $(e + d)^2 = \underline{\hspace{2cm}} + 2 \cdot e \cdot d + d^2$

f) $(b + a)^2 = \underline{\hspace{2cm}} + 2 \cdot b \cdot a + \underline{\hspace{2cm}}$

c) $(2 + e)^2 = \underline{\hspace{2cm}} + 2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} + e^2$

g) $(\underline{\hspace{2cm}} + 3)^2 = \underline{\hspace{2cm}} + 2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} + 3^2$

d) $(3 + a)^2 = \underline{\hspace{2cm}} + 2 \cdot 3 \cdot a + a^2$

h) $(g + b)^2 = \underline{\hspace{2cm}} + 2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} + b^2$

Aufgabe 3

Wende die 1. binomische Formel **an**. **Ergänze** die Lücken.

a) $(c + d)^2 = \square^2 + 2 \cdot c \cdot \square + d^2$

d) $(1,5 + z)^2 = \square^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + \square^2$

b) $(2 + a)^2 = 2^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + \square^2$

e) $(s + 3)^2 = \square^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + \square^2$

c) $(r + 5)^2 = \square^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + 5^2$

f) $(r + 20)^2 = \square^2 + \square \cdot \square \cdot \square + \square^2$

Aufgabe 4

Wende die 1. binomische Formel **an**.

a) $(x + y)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $(s + t)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $(m + 6)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

f) $(b + e)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $(0,5 + b)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

g) $(s + 5)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $(5 + d)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

h) $(0,3 + c)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

Aufgabe 5

Wende die 1. binomische Formel **an** und **fasse zusammen**.

a) $(e + 4)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $(\underline{\hspace{2cm}} + s)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

c) $(3,5 + d)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

d) $(x + 0, \underline{\hspace{2cm}})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

e) $(0,75 + c)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$



Das **a** und das **b** in der 1. binomischen Formel sind nicht immer nur eine einzelne Variable oder eine einzelne Zahl. Wenn sie komplexere Terme sind, dann denke an die Rechenregeln auf und setze Klammern, wenn nötig.

Aufgabe 6

Male in der Gleichung alle Stellen mit rot **an**, die dem **a** in der 1. binomischen Formel entsprechen. Und alle Stellen mit blau, die dem **b** entsprechen. **Fasse** anschließend **zusammen**.

- a) $(2a + x)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot x + x^2 =$ _____
 b) $(a + 4b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 4b + (4b)^2 =$ _____
 c) $(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 =$ _____
 d) $(2t + 0,5s)^2 = (2t)^2 + 2 \cdot 2t \cdot 0,5s + (0,5s)^2 =$ _____

Aufgabe 7

Setze die fehlenden Klammern.

- a) $(5 + 2y)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 2y + 2y^2$
 b) $(2m + 4)^2 = 2m^2 + 2 \cdot 2m \cdot 4 + 4^2$
 c) $(3a + 2b)^2 = 3a^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + 2b^2$
 d) $(1,5 + 3f)^2 = 1,5^2 + 2 \cdot 1,5 \cdot 3f + 3f^2$

Aufgabe 8

Wende die 1. binomische Formel **an**. **Ergänze** die ...

- a) $(2a + d)^2 = \square^2 + 2 \cdot 2a \cdot \square + d^2$
 b) $(6 + 3w)^2 = 6^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + \square^2$
 c) $(3d + 3e)^2 = \square^2 + 2 \cdot \square \cdot \square + \square^2$
 d) $(5r + 4t)^2 = \square^2 + \square \cdot \square + \square^2$

Aufgabe 9

Wende die 1. binomische Formel **an**.

- a) $(5x + y)^2 =$ _____
 b) $(15 + 4d)^2 =$ _____
 c) $(0,5c + r)^2 =$ _____
 d) $(2d + 12e)^2 =$ _____
 e) $(4s + \frac{1}{3}x)^2 =$ _____
 f) $(\frac{1}{3} + 4b)^2 =$ _____

Aufgabe 10

Wende die 1. binomische Formel **an** und **fasse zusammen**.

- a) $(5b + c)^2 =$ _____
 b) $(2,2s + 2t)^2 =$ _____
 c) $(\frac{1}{2}a + 3f)^2 =$ _____
 d) $(3a + \frac{1}{2}b)^2 =$ _____
 e) $(5v + 0,3w)^2 =$ _____
 f) $(\frac{2}{7}d + 7r)^2 =$ _____

Vermischte Aufgaben

M 9

Aufgabe 1

Welche der drei binomischen Formeln wendest du an? **Verbinde.**

Hinweis: Verbinde nicht, wenn es zur Lösung keine geeignete Formel gibt.

$$(f + 4d)(f - 4d) = ?$$

1. binomische Formel

$$(z - 2a)(z - 2a) = ?$$

$$(3w - 3)^2 = ?$$

2. binomische Formel

$$(0,5a + 6)^2 = ?$$

$$\left(\frac{2}{3}a - 2b\right)^2 = ?$$

$$(2,2e + 4)(e - 4) = ?$$

3. binomische Formel

$$(7 - h)^2 = ?$$

$$(10b + u) \cdot (u + 10b)$$

$$(h - k)(h + k) = ?$$

$$(4 - r)(-r - 4) = ?$$

$$(7 + u)(-u + 7) = ?$$

$$(4d - 3s)$$

Aufgabe 2

Setze + oder – ein.

a) $(v - 3w)^2 = v^2 \square 6vw \square 9w^2$

b) $(6 + 5a)^2 = 36 \square 60a \square 25a^2$

c) $(5a + t)(5a - t) = 25a^2 \square t^2$

d) $(5t + 3)(-t + 3) = 25 \square 30t \square 9$

e) $(0,5z - 2y)^2 = 0,25z^2 \square 2zy \square 4y^2$

f) $(-e - 3f)(2e + 3f) = 4e^2 \square 6f^2$

Aufgabe 3

Wende die passende binomische Formel an und berechne.

a) $(5x + a)^2 =$ _____

b) $(0,2d + 5)(0,2d - 5) =$ _____

c) $(z - 7u)^2 =$ _____

d) $(3a + c)(3a + c) =$ _____

e) $(2n + 5e)^2 =$ _____

f) $(4r - 2)(4r - 2) =$ _____

Aufgabe 4

Binomische Formeln rückwärts – fülle die Lücken aus.

a) _____ $= e^2 - f^2$

b) _____ $= a^2 + 2ac + c^2$

c) _____ $= 4 - 4v + v^2$

d) _____ $= 81g^2 + 18gh + h^2$

e) _____ $= 16b^2 - 64z^2$

f) _____ $= \frac{4}{9}c^2 - \frac{4}{3}cd + d^2$

Aufgabe 5

Stelle die Terme erst um und wende dann die passende binomische Formel an.

a) $(h - 3x)(h + 3x) =$ _____

b) $(-a + 3)^2 =$ _____

c) $(-3t + r)(r + 3t) =$ _____

d) $(5 + a)(a + 5) =$ _____

Aufgabe 6

Berechne zuerst mithilfe der binomischen Formeln. Löse dann das Minus vor der Klammer auf.

- a) $-(e + 2)^2 =$ _____
- b) $-(2a + p)(2a - p) =$ _____
- c) $-(11u - v)^2 =$ _____

Aufgabe 7

Gehe wie folgt vor:

- 1. Klammere zuerst ein Minus aus.
- 2. Wende dann die passende binomische Formel an.
- 3. Löse das Minus vor der Klammer auf.

- a) $(-a - b)(a + b) =$ _____
- b) $(x - c)(-x + c) =$ _____
- c) $(-2b - c)(2b - c) =$ _____

Knobelaufgabe

Markiere alle Terme, die sich mithilfe der binomischen Formeln umformen lassen. Finde das Lösungswort.

$(4 - x^2)^2$	B	$(10a + 8^2)(10c - 6^4)$	H
$-8rs + 4s^2 + r^2$	A	$0,25 + 2z + z^2$	N
$(-c - 2d)(c - 2d)$	D	$(-3 + 2x)(3 - 2x)$	H
$9y^2 - 2xy + \frac{1}{9}x^2$	U	$a^2 - \frac{1}{4}a + \frac{1}{16}$	U
$(2m - n)^2$	S	$(19 + r - 7)(21 + r)$	A
$112bc + 64c^2 + 49b^2$	C	$625 - b^2$	N
$25 + 9z^2 - 9 + 24z$	H	$36a^2 - 12ab + b^2$	U
$(8 + y)(y + 8)$	R	$(-16 + d + 5)(d - 11)$	N
$(2x - 4)(7 - 2x)$	T	$r^4 + s^2 + 2rs$	D
$a^2 - 2a + 9$	E	$(12x + 4^2 + 9x^2)$	G
$(3 + 2a)(2a - 12)$	C	$(25 - 2 \cdot 5a + 25a^2)$	E

Geometrische Herleitung der binomischen Formeln

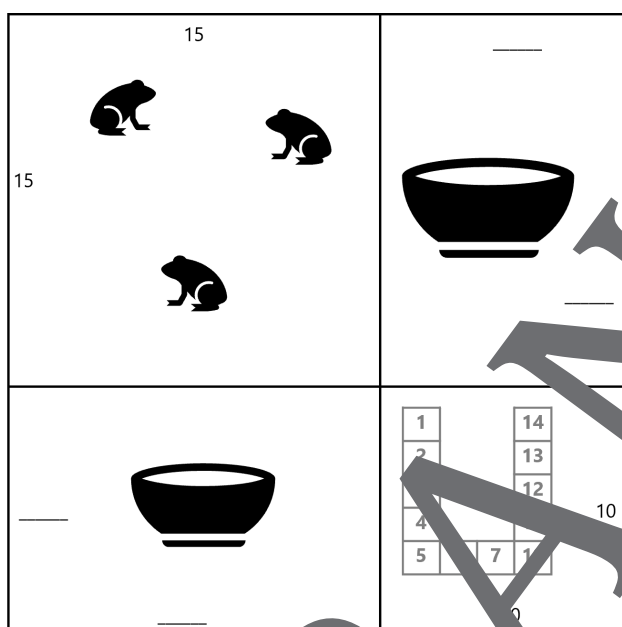
M 10

Die binomischen Formeln können nicht nur algebraisch hergeleitet werden, sondern auch geometrisch. Betrachte hierzu quadratische und rechteckige Flächen mit den Seitenlängen a oder b oder $a + b$ oder $a - b$.

Herleitung der 1. binomischen Formel

Aufgabe 1

Louisa kreiert ein eigenes Spiel. Hierfür möchte sie einen quadratischen Spielplan zerschneiden. Auf einer quadratischen Fläche mit der Seitenlänge 15 cm sollen die Frösche loshüpfen. Auf einer quadratischen Fläche mit der Seitenlänge 10 cm sollen die Punkte gezählt werden. Auf den beiden übrigen rechteckigen Flächen soll je ein Schälchen stehen, in die die Frösche hüpfen sollen.



Grafik: Diana Hauser

- Bestimme alle markierten Seitenlängen.
- Louisa und ihr Bruder Max haben auf zwei unterschiedlichen Wegen die Fläche des Spielplans berechnet. Ergänze ihre Formeln.

Max:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$A = 15 \cdot 10 + 15 \cdot 10 + 10^2$$

Louisa:

$$A = (15 + \underline{\quad}) \cdot (15 + \underline{\quad})$$

$$A = 25 \cdot 25$$

$$A = \underline{\quad}$$

Mehr Materialien für Ihren Unterricht mit RAAbits Online

Unterricht abwechslungsreicher, aktueller sowie nach Lehrplan gestalten – und dabei Zeit sparen.

Fertig ausgearbeitet für über 20 verschiedene Fächer, von der Grundschule bis zum Abitur: Mit RAAbits Online stehen redaktionell geprüfte, hochwertige Materialien zur Verfügung, die sofort einsetz- und editierbar sind.

- ✓ Zugriff auf bis zu **400 Unterrichtseinheiten** pro Fach
- ✓ Didaktisch-methodisch und **fachlich geprüfte Unterrichtseinheiten**
- ✓ Materialien als **PDF oder Word** herunterladen und individuell anpassen
- ✓ Interaktive und multimediale Lerneinheiten
- ✓ Fortlaufend **neues Material** zu aktuellen Themen



Testen Sie RAAbits Online
14 Tage lang kostenlos!

www.raabits.de

