

I.B.57

Mechanik

Druck in Gasen – Gasgleichung für ideale und reale Gase

Kurt Salewski



© Rapeepong Puttakumwong/Moment/Getty Images

Diese Unterrichtseinheit verbindet Modellvorstellungen und Experimente und führt Lernende schrittweise zur allgemeinen Gasgleichung. Experimente mit vertrauten Geräten aus dem häuslichen Umfeld machen abstrakte Zusammenhänge anschaulich. Die Lernenden hinterfragen, ob es „ideale Gase“ wirklich gibt, und erweitern den Gültigkeitsbereich der Gasgleichung daraufhin auf reale Gase. Die Einheit ermöglicht zeitgleich die gezielte Förderung mathematischer Kompetenzen. Zudem üben die Lernenden den Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	9–11
Dauer:	3–11 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Naturwissenschaftliche Kompetenz, Forschungskompetenz, Erkenntnisgewinnungskompetenz, Nutzung der Tabellenkalkulation zur Darstellung von Messergebnissen
Inhalt:	Boyle-Mariotte-Gesetz, Gesetz nach Amontons, ideales Gas, spezielle Gasgleichung, allgemeine Gasgleichung, Van-der-Waals-Gas, Einführung in die grafische Darstellung mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms
Zusatzmaterialien:	Excel-Tabelle mit Eigenschaften und Messwerten einiger Gase

Auf einen Blick

1.–2. Stunde

- Thema:** Gasgesetz nach Boyle-Mariotte
- M 1** Experiment: Druckmessung mit Luftpumpe
- Benötigt:**
- Veränderte Luftpumpe mit Manometer
 - Computer mit Tabellenkalkulation
-

3.–4. Stunde

- Thema:** Alternatives Gasgesetz
- M 2** Experiment zu einem alternativen Gasgesetz
- Benötigt:**
- Veränderte Luftpumpe mit Manometer
 - Computer mit Tabellenkalkulation
 - Briefwaage
-

5.–6. Stunde

- Thema:** Gasgesetz nach Amontons
- M 3** Experiment zum Gesetz nach Amontons
- Benötigt:**
- Beheizbares Wasserbad
 - Thermometer
 - Luftdicht verschließbares Gefäß (z. B. Fahrrad-Trinkflasche aus Aluminium)
 - Computer mit Tabellenkalkulation
-

7.–8. Stunde

- Thema:** Allgemeine Gasgleichung, reale und ideale Gase
- M 4** Gasgleichung für ideale Gase
- M 5** Eigenschaften idealer und realer Gase
- Benötigt:**
- Internetzugang
 - Datensammlung aus Excel-Tabelle

9. Stunde

Thema: **Van-der-Waals-Gleichung**

M 6 Gasgesetz nach Van der Waals

10.–11. Stunde

Thema: **Mathematische Kompetenzen und Grundzüge der Tabellenkalkulation**

M 7 Tabellenkalkulation und direkt- und antiproportionale Abbildungen

Benötigt: Computer mit Tabellenkalkulation
 ggf. Bauklötze

Minimalplan

Die Unterrichtseinheit kann in unterschiedlicher Weise in die eigene Planung eingebunden werden:

1. Eine Möglichkeit liegt in der Begrenzung auf die drei angegebenen Experimente. Die einzelnen Materialien (**M 1** bis **M 4**) sind so konzipiert, dass sie isoliert verwendet werden können. Notwendige Voraussetzungen dazu werden jeweils angesprochen. Hier ergeben sich noch weitere Kürzungsmöglichkeiten. Die Experimente können ...
 - für alle 3 Experimente nacheinander,
 - durch unterschiedliche Gruppen gleichzeitig,
 - als Schüler- oder Demonstrationsexperiment durchgeführt werden.
2. **M 4** kann nur bis zur Herleitung der üblichen Gleichung eingesetzt werden.
3. Die Erweiterung auf reale Gase kann entfallen.
4. Wenn die mathematische Kompetenz ausreichend vorhanden ist, kann Material **M 7** entfallen.

Erklärung zu den Symbolen

	Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.
	einfaches Niveau
	mittleres Niveau
	schwieriges Niveau

M 1



Gasgesetz nach Boyle-Mariotte

Experiment: Druckmessung mit einer Luftpumpe

Material:	Versuchsaufbau:
<ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Luftpumpe mit fest angeschlossenem Manometer <input type="checkbox"/> Lineal oder Maßband (mind. 30 cm) <input type="checkbox"/> Klebeband/Marker zum Markieren der Stablänge <input type="checkbox"/> ggf. Tabellenkalkulationsprogramm zur Ergebniserfassung und -auswertung 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Platziere die Pumpe so auf dem Boden oder dem Tisch, dass sie stabil steht und du das Manometer ablesen kannst. 2. Lege die „Gesamtlänge“ L_0 des Pumpenstabs fest, indem du die Länge des Stabs zwischen den Positionen „ganz drin“ und „ganz draußen“ misst. Markiere die beiden Positionen auf der Pumpe, um sie später wiederfinden zu können.

Aufgaben

1. **Überlege**, was genau das Manometer misst.
Begründe, wieso der Druck im Innern der Pumpe in Wahrheit um den Luftdruck im Raum (ca. 1 bar) größer ist, als das Manometer anzeigt.
2. Die zweite Messgröße bei diesem Experiment ist das Pumpenvolumen V_p , dessen Messung aber schwierig ist. Deutlich einfacher ist es, das relative Volumen $V_{rel} = \frac{V}{V_0}$ zu bestimmen, d. h. den Anteil des luftgefüllten Volumens in der Pumpe an ihrem Gesamtvolumen. Nimm als Beispiel die Situation, in der das Volumen V der zusammengedrückten Luft nur noch 40 % des gesamten Pumpenvolumens V_0 beträgt, d. h. $V_{rel} = 0,4$. **Begründe**, dass dann der relative Anteil des Stabs, der sich noch außerhalb der Pumpe befindet, gerade 40 % der gesamten Stablänge ausmacht und so gerade den Wert V_{rel} wiedergibt.
3. Führe nun einige Messungen durch, indem du den Stab zunächst komplett bis zum Anschlag aus der Pumpe ziehst, sodass das Manometer den Wert null anzeigt. Drücke den Stab dann ein Stück weit in den Zylinder. **Miss** die Länge des Stabes außerhalb des Zylinders und **lies** den Messwert auf dem Manometer **ab**. **Übertrage** die Werte unterschiedlicher Messungen in eine Tabelle und **fertige** eine Grafik **an**. **Achte** auf eine sinnvolle Achsenbeschriftung.
4. Fertige eine zweite Abbildung an. **Wähle** die Auftragung deiner Messwerte auf den Achsen nun so, dass sich eine Ursprungsgerade ergibt. **Ermittle** die Steigung K_1 und **gib** die Gleichung für die Gerade **an**.

Tipp

Rechnet anschließend alle auftretenden Konstanten zusammen und stellt die Gleichung so um, dass auf der linken Seite nur Variablen und auf der rechten Seite nur die Konstante steht. Überlegt, was diese Gleichung bedeutet.

M 2

Experiment zu einem alternativen Gasgesetz



Materialien:	Versuchsaufbau:
<input type="checkbox"/> Luftpumpe mit fest angeschlossenem Manometer <input type="checkbox"/> Behälter mit Druckventil <input type="checkbox"/> Briefwaage <input type="checkbox"/> ggf. Tabellenkalkulationsprogramm zur Ergebniserfassung und -auswertung	<ol style="list-style-type: none"> 1. Platziere die Pumpe so auf dem Boden oder dem Tisch, dass sie stabil steht und du das Manometer ablesen kannst. 2. Platziere den Behälter auf der Briefwaage, wobei du die Pumpe noch nicht an den Behälter anschließt.

Aufgaben

1. Falls du den vorigen Versuch bereits durchgeführt hast, hast du diese Aufgabe dort schon bearbeitet und kannst sie überspringen. **Überlege**, was genau das Manometer misst. **Begründe**, wieso der Druck im Innern der Pumpe in Wahrheit um den Luftdruck im Raum (ca. 1 bar) größer ist, als das Manometer anzeigt.
2. **Notiere** das Gewicht m_0 des Druckbehälters, indem du die Skala der Briefwaage abliest. Achte darauf, dass die Pumpe noch nicht an den Behälter angeschlossen ist. Schließe die Pumpe an den Behälter an und pumpe Luft in den Behälter. **Lies** den Druck P von der Skala des Manometers **ab** und **notiere** ihn in einer Tabelle. Trenne schließlich die Pumpe vom Druckbehälter. Achte darauf, dass beim Abtrennen möglichst wenig Luft entweicht.
3. **Lies** erneut die Masse m des Behälters von der Briefwaage ab und **notiere** sie ebenfalls in deiner Tabelle.
4. **Führe** die Schritte 2 und 3 für verschiedene Drücke **durch**.
5. **Fertige** aus deinen Messwertpaaren eine Grafik **an**, wobei du den Druck P auf die y-Achse und die Massenzunahme $\Delta m = m - m_0$ auf die x-Achse aufträgst.
6. Lege eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte. **Miss** die Steigung K_2 und den y-Achsenabschnitt der Geraden. **Stelle** die Geradengleichung **auf** und **begründe**, wieso der y-Achsenabschnitt null sein muss. Falls deine Ausgleichsgerade nicht durch null verläuft: **Überlege**, woher die Abweichung stammen könnte.
7. **Überlege**, wie du aus den gemessenen Massen die Luftdichte im Behälter berechnen kannst. **Formuliere** die Geradengleichung mit dem Zusammenhang zwischen Masse und Dichte um, sodass du eine Formel für den Druck erhältst, die nur von den experimentellen Konstanten und der Dichte abhängt.



Kurt Salewski © RAABE

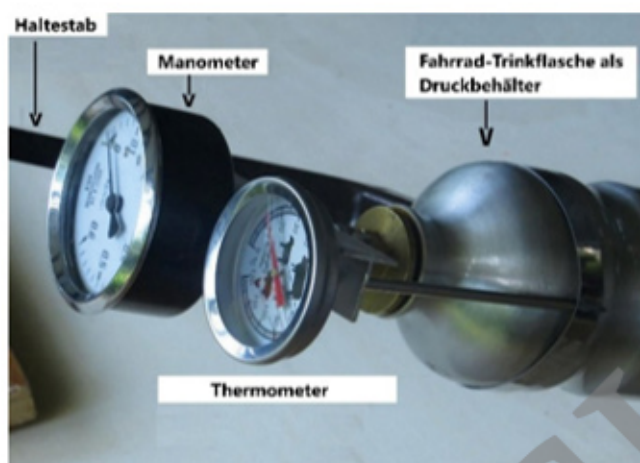
Gasgesetz nach Amontons

M 3



Materialien:

- Behälter mit Druckventil, z. B. eine Fahrradtrinkflasche aus Aluminium
- Manometer
- Thermometer, idealerweise mit Metallfühler
- Beheizbares Wasserbad, z. B. Topf mit Kochplatte
- Haltestab



Kurt Salewski © RAABE

Versuchsaufbau:

1. Verschließe den Luftbehälter bei Raumtemperatur und bringe das Thermometer an, sodass es (falls möglich) die Temperatur der Flasche misst. Falls das nicht möglich ist, kann der Thermometerfühler auch im Wasserbad platziert werden.
2. Bringe den Haltestab an der Konstruktion an, sodass du die Flasche in das Wasserbad stellen und sie wieder herausholen kannst, ohne die Flasche selbst anfassen zu müssen.
3. Beginne das Wasserbad zu erwärmen. Stelle die Flasche aber noch nicht in das Wasserbad.

Aufgaben

1. **Diskutiere** mit deiner Versuchspartnerin/deinem Versuchspartner, welche Veränderung des Drucks ihr erwartet, wenn ihr den Behälter und damit die Luft im Behälter im Wasserbad erwärmt.
2. **Begründe**, wieso der Druck im Innern der Pumpe in Wahrheit um den Luftdruck im Raum (ca. 1 bar) größer ist, als das Manometer anzeigt. (Falls du den vorigen Versuch bereits durchgeführt hast, hast du diese Aufgabe dort schon bearbeitet und kannst sie überspringen.)
3. **Notiere** die Werte für Temperatur T und Druck P in einer Tabelle, wobei der Behälter noch nicht im Wasserbad stehen darf.
4. **Stelle** den Behälter nun in das Wasserbad. **Lies** nach einer Minute die aktuelle Temperatur und den aktuellen Druck **ab** und **notiere** die Werte in deiner Tabelle. **Wiederhole** diese Messung jede Minute, bis das Thermometer ca. 80 °C. anzeigt. **Schalte** dann die Wärmequelle **aus**.
5. **Erstelle** aus den gemessenen Wertepaaren ein Diagramm, indem du die Temperatur auf der x-Achse und den Druck auf der y-Achse aufträgst. **Lege** eine Ausgleichsgerade durch die Messpunkte, **berechne** ihre Steigung K_3 und **formuliere** die Geradengleichung. **Beachte**, dass du für eine vollständige Geradengleichung den y-Achsenabschnitt benötigst.
6. **Berechne** anhand deiner Geradengleichung, bei welcher Temperatur der Wert $P = 0$ bar erreicht wird. **Vergleiche** dein Ergebnis mit dem Literaturwert für den absoluten Nullpunkt $T_0 = -273,15$ °C.
Formuliere den Zusammenhang, den du zwischen Druck und Temperatur gefunden hast.

M 4 Gasgleichung für ideale Gase

In M 1 bis M 3 wurden experimentell drei Zusammenhänge zwischen dem Gasdruck und jeweils einer anderen messbaren Größe bestimmt:

Boyle-Mariotte-Gesetz	$P \cdot V = \text{const.}$
Gesetz nach Amontons	$\frac{P}{T} = \text{const.}$
Zusammenhang zwischen Druck und Dichte	$\frac{P}{\rho} = \text{const.}$

In jedem der Experimente wurden die jeweils anderen Parameter festgehalten. Wie aber beschreiben wir nun eine ganz allgemeine Situation, in der sich mehrere Parameter zeitgleich ändern können? Erinnern wir uns an die Versuchsaufbauten, stellen wir zunächst fest, dass sowohl im Versuch mit der Briefwaage (M 2) als auch im Versuch mit dem Wasserbad (M 3) das Volumen des untersuchten Gases gleich geblieben ist: Die Luft war jeweils in der Fahrradflasche eingeschlossen und konnte nicht entweichen. Daher können wir das Gesetz nach Amontons mit dem Zusammenhang zwischen Druck und Dichte kombinieren (siehe M 7):

Merke: Spezifische Gasgleichung

Der Druck verändert sich bei gleichbleibendem Volumen linear mit der Temperatur sowie mit der Gasdichte:

$$P \propto \rho \cdot T \quad \text{oder} \quad P = R_s \cdot \rho \cdot T$$

Die Konstante R_s heißt spezifische Gaskonstante.

Die Gleichung im „Merke!“-Kasten wird manchmal „Spezifische Gasgleichung“ genannt, weil die Dichte ρ und die spezifische Gaskonstante R_s von dem Gas selbst abhängen, das man beobachtet. Wir wollen nun eine allgemeinere Form der Gasgleichung herleiten, die immer gilt, also unabhängig davon, welches Gas wir beobachten. Dafür setzen wir für die Dichte zuerst ihre Definition ein: Dichte ist nämlich Masse pro Volumen, $\rho = \frac{m}{V}$, womit wir $P = R_s \cdot \frac{m}{V} \cdot T$ erhalten.

Die Masse m des beobachteten Gases ist dabei gleich der Masse jedes einzelnen Gasteilchens m_p mal der Anzahl der Gasteilchen N :

$$P = R_s \cdot \frac{m_p \cdot N}{V} \cdot T$$

Wir fassen nun die Terme etwas anders zusammen und führen zwei neue Größen ein:

$$P = \underbrace{R_s \cdot m_p}_k \cdot \underbrace{\frac{N}{V}}_n \cdot T$$

Die Anzahldichte n ist die Anzahl der Teilchen pro Volumen. Die Konstante k bezeichnet man als Boltzmann-Konstante. Sie ist im Gegensatz zur spezifischen Gaskonstante für alle Gase gültig.



Eigenschaften idealer und realer Gase

M 5



Mithilfe der allgemeinen Gasgleichung sind wir in der Lage, das Verhalten von Gasen zu beschreiben. Experimentell überprüft haben wir bisher aber nur die spezielle Gasgleichung für verschiedene Gase (M 4).

Da in der allgemeinen Gasgleichung neben den Zustandsgrößen nur noch die Boltzmann-Konstante k auftaucht, erwarten wir, dass wir für diese immer den gleichen Wert erhalten, wenn wir für ein beliebiges Gas die Zustandsgrößen messen. Wir erwarten, dass

$$p = n \cdot k \cdot T \quad \rightarrow \quad k = \frac{p}{n \cdot T}$$

Merke: Ideales Gas

Gase, die der allgemeinen Gasgleichung folgen, nennt man **ideale Gase**. Misst man die Zustandsgrößen eines idealen Gases, erhält man daraus immer den gleichen Wert für die Boltzmann-Konstante k .



Bisher haben wir Gase über ihre Teilchenzahl und ihre Massendichte beschrieben. Eine weitere Größe, mit der sich Gase gut vergleichen lassen, ist die sogenannte **molare Masse M** . Sie gibt an, wie schwer ein einzelnes Gasteilchen in einem gegebenen Gas ist. Damit kann man also direkt abschätzen, wie schwer ein Gas im Vergleich zu einem anderen ist. Verwendet man die molare Masse, lässt sich aus der spezifischen Gasgleichung der Ausdruck $k = \frac{R \cdot M}{N_A}$ herleiten (die Herleitung findest du in den Hinweisen zu Material M 1). Damit lässt sich gut beurteilen, ob ein gegebenes Gas die Eigenschaften eines idealen Gases besitzt.

Aufgabe 1

In M 2 und M 3 hast du den Ausschlag des Manometers darauf zurückgeführt, dass Gasteilchen beim Aufprall auf eine Membran eine Kraft ausüben. Diese Kraft sollte von der Geschwindigkeit und der Masse der Gasteilchen abhängen. Wie du sicher schon bemerkt hast, kommt die Masse eines Gasteilchens aber nicht in den Formeln vor. **Erkläre**, wieso die Masse der Gasteilchen keinen Einfluss auf den Gasdruck hat.

Aufgabe 2

In der Datentabelle sind experimentell bestimmte Eigenschaften einiger Gase gelistet. Aus den Daten möchten wir nun die spezifische Gaskonstante (Spalte L), die Boltzmann-Konstante (Spalte M), die Massenzahl (Spalte N) und die Abweichung der ermittelten Boltzmann-Konstante vom Literaturwert (Spalte O) bestimmen. Das geht in einem Tabellenkalkulationsprogramm ganz einfach mit Berechnungsformeln. **Ergänze** die Berechnungsformeln für die gesuchten Größen in der Spalte für „n-Wasserstoff“. **Berechne** damit automatisiert alle gesuchten Größen für alle gelisteten Gase.

