

CAS im Einsatz – lineare Gleichungssysteme lösen

Jens Mittag, Oxbüll

1	x ist das Alter von Amelie.
2	y ist das Alter von ...
3	Gleichung_1: → Gleichung_1: $x + y = 59$
4	Gleichung_2: → Gleichung_2: $\dots = 12$
5	Löse[{Gleichung_1, Gleichung_2},{x,y}] → $\{\{x = 19, y = 40\}\}$

Klasse: 8–10

Dauer: 6 Stunden

Inhalt: lineare Gleichungssysteme mithilfe eines CAS lösen; Sachaufgaben in lineare GLS überführen; Äquivalenzumformungen von GLS üben; grafische Lösungen erstellen und interpretieren

Ihr Plus:

- ✓ moderner computerunterstützter Mathematikunterricht
- ✓ Lernerfolgskontrolle
- ✓ geeignet für fachübergreifenden Unterricht (Informatik)

Ein CAS-Programm (Computer Algebra System) ist eine Software, die Mathematikaufgaben mit symbolischen Ausdrücken lösen kann. Nutzen Sie diese moderne Möglichkeit für Ihren Unterricht! Ihre Schüler lernen, wie sie die Möglichkeiten eines CAS gewinnbringend einsetzen, um Mathematik besser zu verstehen. So verlagern Sie in Ihrem Mathematikunterricht den Schwerpunkt vom Rechnen und Umformen zum Problemlösen.

Zum Einsatz kommt das kostenlose CAS-Programm *GeoGebra*.

I/G

Reihe 21 S 4	Verlauf	Material	LEK	Glossar	Lösungen
------------------------	----------------	-----------------	------------	----------------	-----------------

Auf einen Blick

Material	Thema	Stunde
M 1	GeoGebra – So arbeitest du mit einem CAS! Einführung in die Arbeitsweise mit dem CAS GeoGebra; Umformen und Lösen von Gleichungen mithilfe von GeoGebra	1.
M 2	Zahlenraten – Mit GeoGebra findest du jede Lösung! Umformen und Lösen von Gleichungssystemen mithilfe von Äquivalenzumformungen in GeoGebra	2.
M 3	Mathematik unterwegs – Funktionen in GeoGebra Im Kontext von Sachaufgaben Funktionsvorschriften nachvollziehen; Funktionen in GeoGebra eingeben und grafisch darstellen	3.
M 4	Das Grafik-Fenster im CAS – Lösungen ablesen Gleichungssysteme grafisch lösen und interpretieren	4.
M 5	Das CAS kann noch mehr! – Lösung in einem Schritt Gleichungssysteme zu Sachaufgaben aufstellen; Einführung des <i>Löse</i> -Befehls, um Gleichungssysteme zu lösen	5.
M 6 (LEK)	Ratespaß – Rätsel mit Gleichungssystemen modellieren Altersrätsel	6.

I/G

Aufbau des Beitrags

In **M 1** finden Sie eine **Anleitung für den ersten Umgang mit GeoGebra**.

In **M 2–M 5** werden drei Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen erarbeitet:

- Lösung mittels **Äquivalenzumformungen (M 2)**
- **grafisches Lösungsverfahren (M 3 und M 4)**
- Lösung mittels **Löse-Befehl (M 5)**

Diese drei Verfahren bzw. die zugehörigen Materialien können Sie unabhängig voneinander in Ihrem Unterricht einsetzen.

M 6 bietet Ihnen Aufgaben für die drei Verfahren.

Der Abschnitt **Lösungen und Tipps zum Einsatz** von **M 1** enthält weitere Erklärungen zum Umgang mit GeoGebra.

Bei der Bearbeitung der Materialien lernen Ihre Schüler, wie sie Aufgaben mithilfe von GeoGebra lösen können. Um das Gelernte zu vertiefen, bietet es sich an, zusätzliche Aufgaben aus dem eingeführten Unterrichtswerk zu ergänzen.

M 3 Mathematik unterwegs – Funktionen in GeoGebra

Amelie wird von ihrem Vater auf eine lange Autofahrt mitgenommen. Ihr Ziel liegt 1250 km entfernt. Amelie hat festgestellt, dass sie pro Stunde eine Entfernung von 80 km zurücklegen.

Da Amelie Spaß an Mathematik hat, stellt sie eine Funktionsgleichung $y_1(x)$ auf. Mit dieser Funktion kann sie für jeden Zeitpunkt die Entfernung bis zum Ziel berechnen. Schau dir den Auszug rechts aus Amelies GeoGebra-Dokument an. In Zeile 1 ist die Funktionsvorschrift eingegeben. In GeoGebra musst du dazu einen **Doppelpunkt gefolgt von einem Gleichheitszeichen** verwenden.

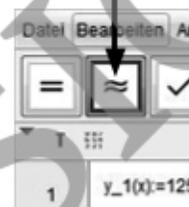
In Zeile 2 berechnet Amelie, wie weit es nach 2 Stunden noch bis zum Ziel ist.

Aufgaben: Funktionen in GeoGebra

Klicke auf das in der Abbildung markierte Icon, bevor du mit den Aufgaben beginnst. Die Ergebnisse werden nun als Dezimalzahl angezeigt.

1	$y_1(x)=1250-80x$ $\approx y_1(x) := -80x + 1250$
2	$y_1(2)$ $\rightarrow 1090$
3	Löse[y_1(x)=100] $\approx \{x = 14.38\}$

Amelies Dokument



- Gib die Funktion $y_1(x)$ aus Amelies Dokument in GeoGebra ein. Berechne mit dieser Funktionsgleichung, wie weit Amelie und ihr Vater nach 3 Stunden, nach 4 Stunden und nach 5 Stunden noch vom Ziel entfernt sind. Finde durch Probieren heraus, nach welcher Zeit die beiden ihr Ziel erreichen.
- 550 km vor dem Ziel sieht Amelie aus dem Auto heraus eine prächtige Burg. Berechne, wie viele Stunden sie bis dahin schon unterwegs sind.
- Du kannst in GeoGebra auch den Graphen einer Funktion zeichnen lassen.
 - Wähle dazu im Menü **Ansicht** den Unterpunkt **Grafik**.
 - Gehe mit der Maus in das Grafik-Fenster und klicke mit der rechten Maustaste.
 - Wähle in dem sich nun öffnenden Kontextmenü **Grafik...** aus.
 - Klicke auf den Registereintrag **Grundeinstellungen**. Hier kannst du den Bereich des Koordinatensystems angeben, der auf dem Bildschirm angezeigt wird.
- Gib die Zahlen wie im Bild rechts ein und schließe das Eingabefenster.
- Klicke auf den weißen Kreis in der Zeile, in der du die Funktionsgleichung eingetragen hast. Du siehst nun den Graphen der Funktion $y_1(x)$.

Grundeinstellungen	xAchse	yAchse	Koordinatengitter
Dimensionen			
x Min: -2	x Max: 20		
y Min: -200	y Max: 1400		

1	$y_1(x)=1250-80x$ $\rightarrow y_1(x) := -80x + 1250$
---	--

Gleichzeitig mit Amelie und ihrem Vater startet die Mutter zu demselben Ziel aus einer Entfernung von 1530 km. Amelies Mutter legt pro Stunde eine Strecke von 120 km zurück.

- Gib eine Funktionsgleichung $y_2(x)$ in das GeoGebra-Dokument ein, mit der du für Amelies Mutter zu jedem Zeitpunkt die Entfernung bis zum Ziel berechnest.
- Lies an den Graphen ab, wann und wo sich Amelie, ihr Vater und ihre Mutter treffen.

Lösungen und ■ Tipps zum Einsatz

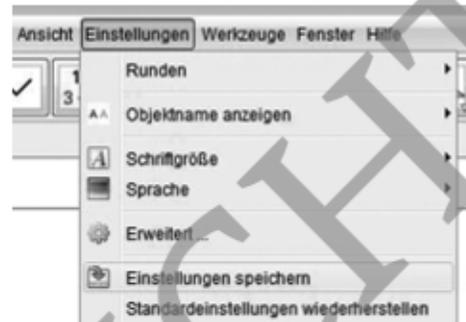
M 1 GeoGebra – So arbeitest du mit einem CAS!

■ Zeigen Sie Ihren Schülern zunächst die grundlegenden Funktionen in GeoGebra:

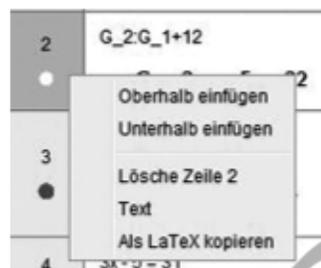
Wenn Sie das Programm mit den Standardeinstellungen starten, öffnet sich ein Algebra- und ein Grafik-Fenster. Wählen Sie, wie auf dem Arbeitsblatt **M 1** beschrieben, im Menü **Ansicht** den Eintrag **CAS** aus, um das CAS-Fenster zu öffnen.

Klicken Sie sowohl im Algebra- als auch im Grafik-Fenster oben rechts auf das Kreuz zum Schließen, sodass nur das CAS-Fenster geöffnet bleibt.

Diese Einstellungen können Sie speichern, indem Sie im Menü **Einstellungen** den Befehl **Einstellungen speichern** anklicken. Beim nächsten Start wird GeoGebra nur das CAS-Fenster öffnen.

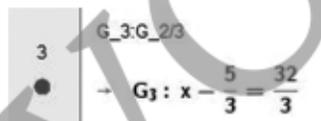
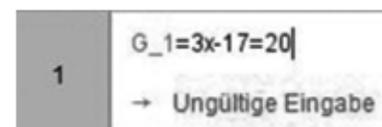


Um in eine Eingabezeile zu gelangen, klicken Sie direkt in das CAS-Fenster und geben die gewünschten Terme ein. So können Sie auch Änderungen vornehmen. Haben Sie Inhalte in einer Zeile geändert, berechnet GeoGebra die Auswirkungen auf die anderen Eingabezeilen. Sollte dies nicht automatisch geschehen, gehen Sie im Menü **Ansicht** auf **Alle Objekte neu berechnen**. Hier lohnt es, sich die angezeigte Tastenkombination (Ctrl + R) zu merken, da man diesen Befehl häufiger benötigt.



Möchten Sie innerhalb eines Dokuments eine Zeile einfügen oder löschen, klicken Sie an der entsprechenden Stelle mit der rechten Maustaste links am Rand auf die Zeilennummerierung. Es öffnet sich ein Kontextmenü, wie Sie es in der Abbildung links sehen. Sie können auswählen, ob Sie die neue Zeile ober- oder unterhalb einfügen möchten. Dasselbe Menü bietet Ihnen die Auswahl, eine Zeile zu löschen.

GeoGebra gibt eine Fehlermeldung aus, wenn ein Eingabefehler vorliegt. Ist die Syntax der Eingabe fehlerfrei, wird sie bei Zuweisungen wiederholt ausgegeben oder bei Berechnungen das Ergebnis angezeigt.



Die Schüler formen in den Aufgaben dieses Beitrags Gleichungen um. Damit sie auf Gleichungen in GeoGebra zugreifen können, müssen sie diese benennen. In diesem Beitrag werden dazu der Buchstabe **G** (bzw. **Gl**) – für **G**leichung – und ein Index verwendet. Die Indizes werden in der Eingabe mit einem Unterstrich abgetrennt. In der Eingabewiederholung lässt GeoGebra den Unterstrich weg und die Zeichen, die dem Unterstrich folgen, werden tatsächlich als Index ausgegeben.

Um in einer GeoGebra-Datei durch Anmerkungen den Gedankengang darzustellen, aktivieren Sie den **Textmodus** für eine Eingabezeile. Klicken Sie dazu auf das Icon mit dem **T**, das in der Abbildung rechts mit dem Pfeil markiert ist. Dieses Icon aktiviert den Textmodus. Sämtliche Eingaben in eine Eingabezeile werden dann von GeoGebra als **Text** interpretiert und nicht als Kommando.

