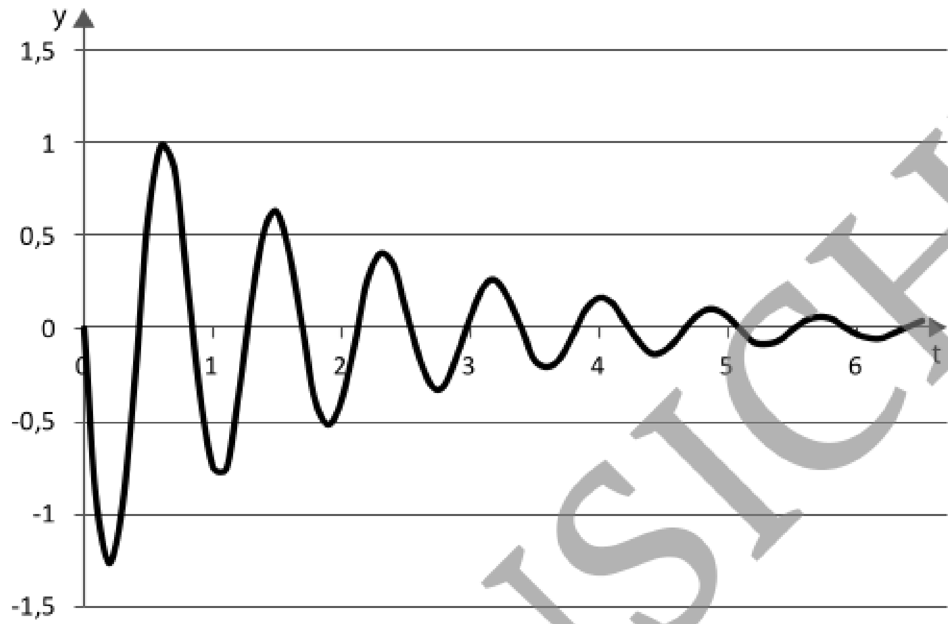
Differenzialgleichungen vom Typ $y' = f(y, x)$ und $y'' = f(y', y, x)$ – ein Projekt

Christian Rühenbeck, Bovenden



Differenzialgleichungen treten häufig bei Schwingungsvorgängen auf. Hier dargestellt: der Graph einer numerisch bestimmten Lösungsfunktion für eine gedämpfte Schwingung.

Klasse:	12 (G8) oder 13
Dauer:	etwa 14 Unterrichtsstunden für die Teile I und II
	Teil III dann, wenn der betreffende Typ von DGL im naturwissenschaftlichen Unterricht auftritt
Inhalt:	Einführung in Differenzialgleichungen vom Typ $y' = f(y,x)$ und $y'' = f(y', y, x)$:
	Unter Voraussetzung weniger Kenntnisse des Integrationskalküls gibt dieser Beitrag eine Einführung in Herkunft sowie numerische und analytische Lösungen solcher Differenzialgleichungen.
Ihr Plus:	Das Sachgebiet „Differenzialgleichungen" gehört ähnlich wie das der Matrizenrechnung zu den eher ungewohnten Unterrichtsinhalten. Daher gibt es nur wenige für die Schüler geeignete Unterrichtsmaterialien. Der vorliegende Beitrag macht Ihre Schüler mit diesem Sachgebiet vertraut. Zudem ermöglichen Ihnen Anwendungsbeispiele aus Physik, Chemie und Biologie fächerverbindendes Unterrichten.

Immer öfter tauchen selbst in populärwissenschaftlichen Texten Hinweise auf die zunehmende Bedeutung von Differenzialgleichungen auf. In der Oberstufe der Schulen kommen sie speziell im Fach Physik, aber gelegentlich auch in den Fächern Chemie und Biologie vor. Wie kommt man auf solche Gleichungen, und wozu sind sie gut? Sie finden in diesem Beitrag einige Anregungen und Bearbeitungen für den Einsatz in der Schule.

Auf einen Blick

Teil I: Numerische Lösungen ausgewählter DGL

Material	Thema	Stunde
M 1	**Pflöcke in einem großen Sandplatz (Einstieg)** Eine motivierende Aufgabe als Einstieg	1./2.
M 2	**Die numerische Bearbeitung des Einstiegsproblems** Erste Nutzung der Tabellenkalkulation	3.
M 3	**Einige Beispiele zur Übung** Numerische Lösungen zu DGL erster und zweiter Ordnung	4.–6.

Teil II: Analytische Lösungen ausgewählter DGL

Material	Thema	Stunde
M 4	**DGL erster Ordnung** DGL, die nach Trennung der Variablen durch Umkehrung der Kettenregel lösbar sind	7.–10.
M 5	**Exkurs: Zur logistischen Wachstumsfunktion** Analytische Behandlung einer bekannten Wachstumsfunktion	11./12.
M 6	**DGL zweiter Ordnung** Aus der Kenntnis der Eigenschaften von Kosinus- und e-Funktion folgen Lösungsansätze bestimmter DGL.	13./14.

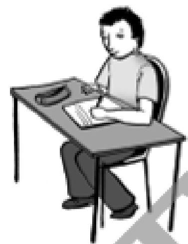
Teil III: Vom Nutzen der DGL in der Schule

Material	Thema	Stunde
M 7	**DGL der Physik: Infoblatt (Bsp.: Schwingungsgleichungen)** Numerische Lösung der Schwingungsgleichung	1./2.
M 8	**DGL der Physik: Aufgaben** Analytische Lösungen zu: Schwingungsgleichung, Kondensatorentladung, radioaktiver Zerfall, Fall mit Luftreibung, Schrödingergleichung und linearer Potenzialtopf	3.–8.
M 9	**DGL der Chemie (auf CD-ROM 66)**	HA
M 10	**DGL der Biologie (auf CD-ROM 66)**	HA

Minimalplan

Behandeln Sie entweder die numerische Lösung ausgewählter DGL (Teil I) oder die analytische Lösung ausgewählter DGL (Teil II). Die Anwendungen (Teil III) sollten Sie kurz anreißen und interessierten Schülern als Hausaufgabe geben, insbesondere das Material, das Sie auf **CD-ROM 66** (DGL der Biologie und Chemie) finden.

M 3 Einige Beispiele zur Übung



Einzelarbeit

Im Prinzip können Sie sich ihre Aufgabenstellungen selbst wählen, und vielleicht werden Sie auch vieles ausprobieren. Die folgenden Aufgaben sollten Sie bearbeiten, weil Sie dabei auf bekannte Funktionsgraphen stoßen werden.

Aufgabe 1

Wählen Sie ausreichend kleine Schrittweiten. Bestimmen Sie – wie beim Arbeitsblatt **M 2** erklärt – Funktionsverläufe, die aus folgenden DGL und folgenden Startpunkten resultieren. Stellen Sie Vermutungen an, um welchen Funktionstyp es sich jeweils handeln könnte.

a) $y' = -y$ und $(0|6)$ b) $y' = 2\,\frac{y}{x}$ und $(-4|6)$ c) $y' = -y^2$ und $(0|6)$

d) $y' = \frac{1}{y}$ und $\left(0 \mid \frac{1}{2}\right)$ e) $y' = -y^2 x$ und $(0|6)$ f) $y' = \frac{x}{y}$ und $(0|2)$

Können Sie in einem Fall eine Ungenauigkeit entdecken, die durch das numerische Verfahren verursacht wird?

Erweiterung der Tabellenkalkulation

Um DGL vom Typ $y'' = f(y', y, x)$ numerisch bearbeiten zu können, ist die Kopfzeile der Tabellenkalkulation wie folgt zu ergänzen (nutzen Sie ein zweites Tabellenblatt):

	A	B	C	D	E	F
Zeile	Parameter	Betrag	$x \to x + \Delta x$	$y'' = f(y', y, x)$	$y' \to y' + y''\Delta x$	$y \to y + y'\Delta x$

In der Spalte D erscheint der Term der DGL, zu der der Funktionsverlauf näherungsweise bestimmt werden soll.

Aufgabe 2: Entdeckungen zur DGL $y'' = f(y', y, x)$

Wählen Sie wie in Aufgabe 1 ausreichend kleine Schrittweiten und bestimmen Sie die Funktionsverläufe, die aus den nachfolgend genannten DGL und den Startpunkten resultieren.

Stellen Sie auch hier Vermutungen an, um welche Funktionen es sich jeweils handeln könnte.

a) $y'' = 3y + 2$, $(0|2)$ und $y'(0) = 3$

b) $y'' = -3y + 2$, $(0|2)$ und $y'(0) = 0$

c) $y'' = -y' - 20y$, $(0|0)$ und $y'(0) = -20$

d) $y'' = y' - 20y$, $(0|0)$ und $y'(0) = -20$

e) $y'' = -0{,}4y'^2$, $(0|0)$ und $y'(0) = 50$

f) $y'' = -0{,}4y' - 3y + 2x$, $(0|2)$ und $y'(0) = -5$

M 8 DGL der Physik: Aufgaben

Aufgabe 1: Schwingungsgleichung

a) Gehen Sie mit dem Ansatz $y = Ae^{Bt} \cdot f(t)$ in die DGL $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$.

Welche neue Gleichung entsteht?

Tipp

Da B eine zunächst frei wählbare Konstante ist, können Sie $B = -\alpha/2$ verwenden. Dadurch entsteht eine Ihnen bekannte DGL.

b) Bestimmen Sie nun für die neue DGL wie anschließend für die DGL $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = 0$ die Schar der Lösungen.

c) Wer schafft die Probe?

Tipp

Es geht etwas leichter, wird zwischendurch $\sqrt{\beta - \alpha^2/4} = \omega_r$ verwendet.

d) Zeichnen Sie den Graphen der Lösungsfunktion für die Parameter $y(0) = 5, \alpha = 1, \beta = 20$.

Aufgabe 2: Kondensatorentladung, radioaktiver Zerfall

Wird ein vorher aufgeladener Kondensator mit der Kapazität C über einen Widerstand R entladen, ist die Änderung der Stromstärke proportional der aktuellen Stromstärke, d. h. es gilt die DGL

$\dot{I} = -\frac{1}{RC} I$.

Diese DGL ist Ihnen bekannt, siehe Arbeitsblatt **M 4**.

Gleiches gilt für den radioaktiven Zerfall, bei dem die Zerfallsrate $\dot{N}$ proportional der aktuellen Anzahl N nicht zerfallener Partikel ist, d. h. die DGL $\dot{N} = -kN$ mit der Zerfallskonstanten k zutrifft. Bestimmen Sie Lösungsfunktionen der DGL $\dot{I} = -\frac{1}{RC} I$ bzw. $\dot{N} = -kN$.

Aufgabe 3: Fall mit Luftreibung

Lassen Sie beispielsweise eine Styroporkugel aus größerer Höhe fallen, beobachten Sie zunächst einen beschleunigten Fall ähnlich dem freien Fall, der aber schnell in einen Fall mit konstanter Sinkgeschwindigkeit übergeht. Zur Aufstellung einer DGL hilft wieder die Newton'sche Kräftebilanz, nach der die Summe aller angreifenden Kräfte Null ergibt. In diesem Fall sind drei Kräfte im Spiel: $m\ddot{y} - \lambda\dot{y}^2 + mg = 0$, d. h. es liegt die DGL

$\ddot{y} = \frac{\lambda}{m}\dot{y}^2 - g$ vor.

In dieser Gleichung bedeuten:

m = die Masse der Styroporkugel, g = die Schwerebeschleunigung und $\lambda = \frac{1}{2}\rho A c_W$ eine Konstante, die zusammen mit $\dot{y}^2$ den Luftwiderstand beschreibt; ρ ist die Dichte der Luft, A die Querschnittsfläche des bewegten Körpers und c_W der sog. Widerstandsbeiwert, der im Fall der Styroporkugel etwa 0,23 beträgt.

Bestimmen Sie für den Anfangswert $\dot{y} = 0$ auf numerischem Wege eine Lösungsfunktion der DGL $\ddot{y} = k\dot{y}^2 - g$ mit $k = \frac{\lambda}{m} \approx 0{,}4\ \text{m}^{-1}$ (m im Nenner → Masse; m^{-1} → 1/Meter) und $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ die Schwerebeschleunigung.