Einführung in die Vektorrechnung – eine Lerntheke

Dr. Wolfgang Tews, Berlin

Foto: Anna-Greta Wittnebel

Abb. 1: An vielen Orten begegnen uns gerichtete Größen – Vektoren! (auf dem Predigtstuhl (Lattengebirge) bei Bad Reichenhall in den Berchtesgadener Alpen)

Klasse: 10/11

Dauer: 10–15 Stunden

Inhalt: Verschiebungen in der Ebene, Vektorbegriff, Kraft als Vektor, Beispiele für Vektoren, Rechenregeln der Vektorrechnung, Anwendungen der Vektorrechnung in Geometrie und Physik

Ihr Plus:

✓ Lernerfolgskontrolle mit Lösungen und Bewertungsvorschlag

✓ knappe Darstellung des Sachinhalts

✓ einfache Anwendung wegen didaktischer Reduktion

Vektoren an einer Wegkreuzung in den Bergen! Wer sich mit der Vektorrechnung beschäftigt, findet in seinem Alltag viele Beispiele für Vektoren. Mit dieser Unterrichtseinheit erlernen Ihre Schüler die wichtigsten Grundlagen der Vektorrechnung. Eine Lernerfolgskontrolle rundet den Beitrag ab.

M 1 Frischen Sie Ihr Wissen auf! – Vektoren im Alltag

Vektoren – geometrische und algebraische Darstellung

Eine Größe, deren Angabe alleine durch einen Zahlenwert (ggf. mit Einheit) charakterisiert ist, wird als **skalare Größe** oder kurz als **Skalar** bezeichnet. Beispiele sind Temperatur, Dichte oder Masse. Das Thermometer z. B. zeigt 36,6 °C an.

Abb. 2: Ein Thermometer zeigt die skalare Größe Temperatur an.
Abb. 3: Die Geschwindigkeit, mit der sich das Rennauto bewegt, ist dagegen eine vektorielle Größe.

Größen, die durch zwei Zahlenwerte, eine Länge und eine Richtung, gekennzeichnet sind, nennt man **Vektoren**.

Die Abb. 4 zeigt zwei Vektoren unterschiedlicher Länge, die vom Anfangspunkt A ausgehend in unterschiedliche Richtungen zeigen. Der Vektor, der vom Punkt A zum Punkt B zeigt, kann entweder durch einen Kleinbuchstaben mit einem Pfeil, also $\vec{a}$, oder durch Anfangs- und Endpunkt mit einem Pfeil, also $\overrightarrow{AB}$, bezeichnet werden. Für den zweiten Vektor können die Bezeichnungen $\vec{c}$ oder $\overrightarrow{AC}$ gewählt werden.

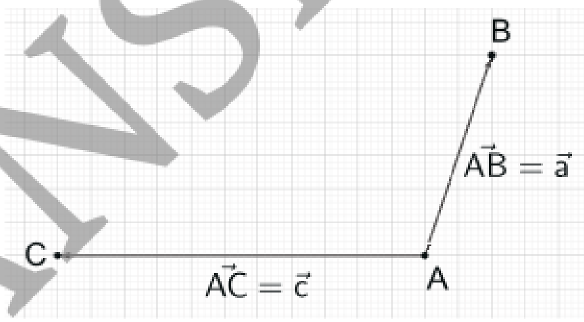

Abb. 4: 2 Vektoren mit unterschiedlichen Richtungen

Geometrische Bedeutung von Vektoren am Beispiel von Verschiebungen

Bei der Angabe z. B. einer Verschiebung eines Dreiecks in der Ebene oder im Raum ist nicht nur die Länge der Verschiebung, sondern auch die Richtung wichtig.

Abb. 5 zeigt zwei Verschiebungen eines Dreiecks ABC in der Ebene. Die Pfeile, die die Punkte A, B und C in die Punkte A′, B′ und C′ abbilden, sind **Repräsentanten** ein und desselben Vektors gleicher Richtung und gleicher Länge. Gleiches gilt für die Pfeile, die das Dreieck ABC in das Dreieck A″B″C″ überführen. Je nachdem, was für eine Verschiebung vorliegt, gibt es unendlich viele Repräsentanten eines bestimmten Vektors. Die Menge aller Pfeile, die ein und dieselbe Verschiebung veranschaulichen, wird auch Pfeilklasse oder einfach **Vektor** genannt.

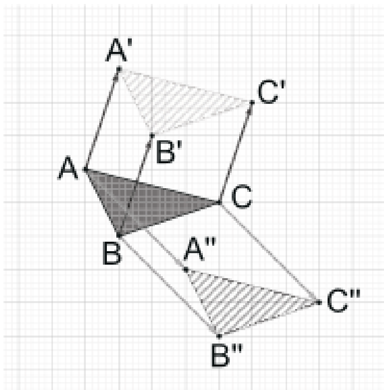

Abb. 5: Verschiebungen eines Dreiecks in der Ebene

M 4 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren

Information

Lineare Abhängigkeit und lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Eine Summe der Form $\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ mit r, s und t $\in \mathbb{R}$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ bezeichnet. Eine solche Summe kann auch aus mehr als drei Vektoren gebildet werden.

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$, deren Pfeile parallel verlaufen, heißen **kollinear**. Zwei kollineare Vektoren stellen das einfachste Beispiel einer Linearkombination dar; der eine ist das Vielfache des anderen: $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ $(r \in \mathbb{R})$. In diesem Fall bezeichnet man die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ als linear abhängig. Gilt $\vec{d} \neq r \cdot \vec{c}$ für alle $r \in \mathbb{R}$, so heißen die Vektoren $\vec{c}, \vec{d}$ **linear unabhängig**.

Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ in der Ebene, deren Pfeile **senkrecht** zueinander verlaufen, sind linear unabhängig. Vektoren, die parallel zu einer Ebene liegen, heißen **komplanar**.

Drei komplanare Vektoren sind linear abhängig. Drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ im Raum, deren Pfeile senkrecht aufeinander stehen, sind linear unabhängig.

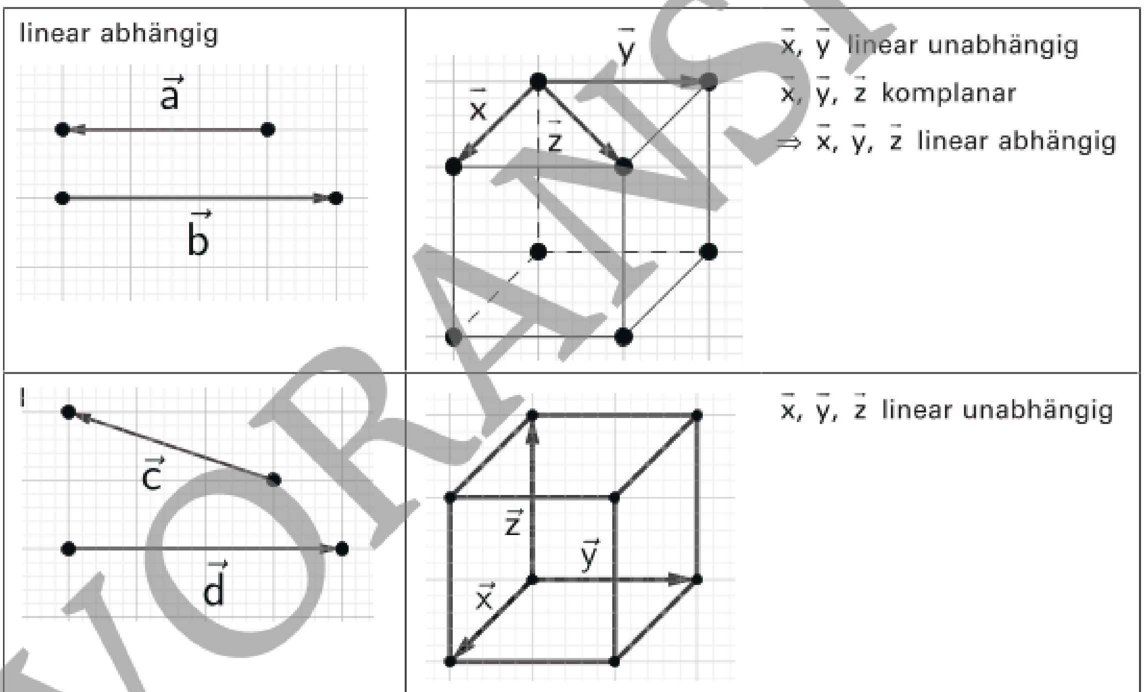

Abb.: 8: Lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit von Vektoren

Definition

Die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_n$ heißen **linear unabhängig**, wenn für die Gleichung

$$a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3 + \ldots + a_n\vec{x}_n = \vec{o}$$

nur die sog. **triviale Lösung** $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ existiert,
anderenfalls heißen die Vektoren **linear abhängig**.

M 8 An vielen Orten begegnen Ihnen gerichtete Größen – Vektoren!

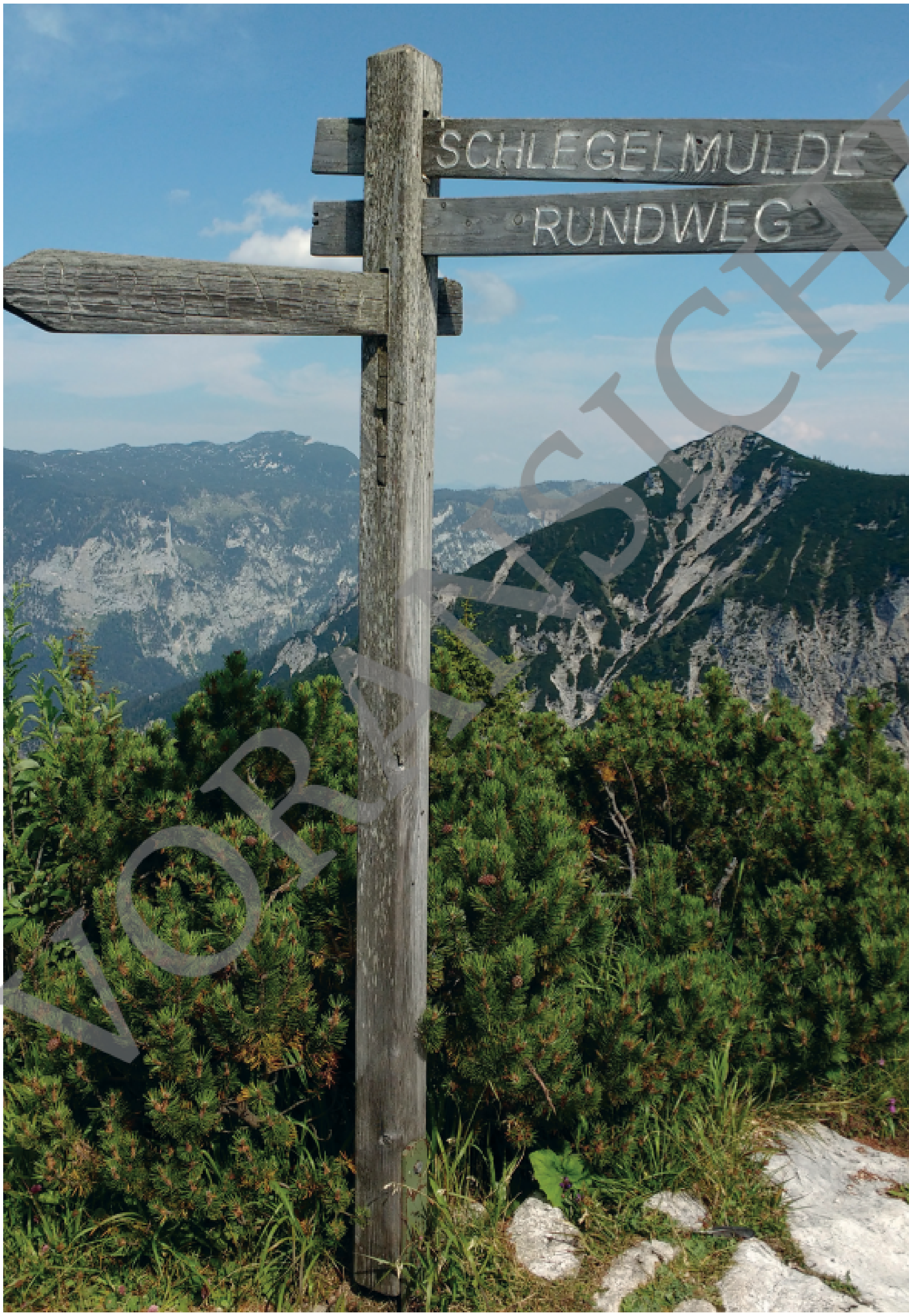

Foto: Anna-Greta Wittnebel

Abb. 15: Auf dem Predigtstuhl (Lattengebirge) bei Bad Reichenhall in den Berchtesgadener Alpen