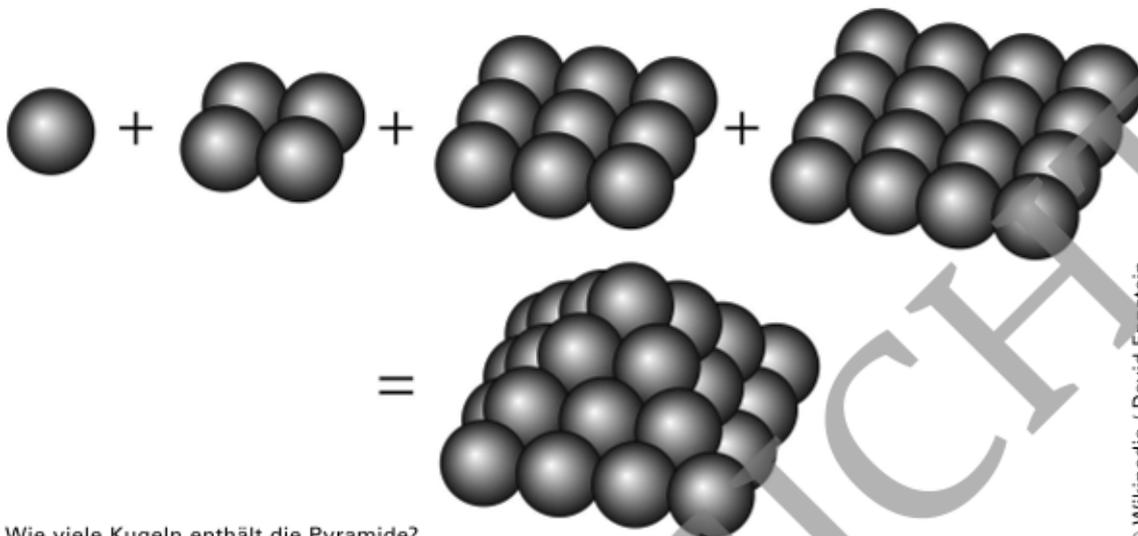


Alles, was zählt! – Besondere Zahlen entdecken

Wolfgang Göbels, Bergisch Gladbach

I/A



Wie viele Kugeln enthält die Pyramide?

Klasse: 8 (G8)

Dauer: 4 Stunden

Inhalt: Die Eigenschaften von Zahlen erforschen: Primzahl, Mirpzahl, Primzahlzwilling, Fast-Primzahl, defiziente Zahl, vollkommene Zahl, abundante Zahl, Fakultät, Dreieckszahl, Gauß'sche Summenformel, Quadratzahl, Kubikzahl, Tetraederzahl, Germain'sche Primzahl, befreundete bzw. verwandte Zahlen

Ihr Plus:

- ✓ Training von Rechenfertigkeit und Anwendung von Teilbarkeitsregeln
- ✓ Selbstlernmaterialien für besonders interessierte/begabte Schüler
- ✓ Material, mit dem Sie Ihre Schüler zu Schuljahresbeginn verblüffen.

Die Welt der Zahlen ist groß. Neben den allseits bekannten Zahlen wie beispielsweise Quadrat-, Kubik- oder Primzahlen gibt es noch eine Vielzahl von **besonderen Zahlen** mit durchaus bemerkenswerten Eigenschaften. Von diesen Zahlen stellen wir hier eine kleine Auswahl vor.

Lösung: $1 + 4 + 9 + 16 = 30$; 30 ist ein Beispiel für eine Pyramidenzahl; Diese liefert die Formel: $\frac{n(n+1)((k-2)n-k+5)}{6}$
Hier: $k = 4$; $n = 4$

M 1 Die Teilbarkeitsregeln – frische dein Wissen auf!



Erinnere dich:

Die Menge $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ der natürlichen Zahlen umfasst alle positiven ganzen Zahlen. Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist durch eine natürliche Zahl $t \in \mathbb{N}$ teilbar, wenn der Quotient $n : t$ wieder eine natürliche Zahl ist.

Die Zahl t heißt Teiler der Zahl n .

Mit dem Taschenrechner stellst du durch einfaches Dividieren sehr schnell fest, ob der Quotient $n : t$ eine natürliche Zahl oder eine Dezimalzahl mit einer oder mehreren Nachkommastellen ist. Aber mit den Teilbarkeitsregeln geht es manchmal sogar im Kopf.

Beispiel:

Die Zahl 16 ist durch 1, 2, 4, 8 und 16 teilbar.



© Pixelio

Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen bis 10:

Die Zahl ist teilbar durch ...	genau dann, wenn ...
2	sie gerade ist.
3	ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
4	die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
5	sie auf 0 oder 5 endet.
6	sie gerade ist und ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
8	die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl durch 8 teilbar ist.
9	ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
10	sie auf 0 endet.

Zusätzliche Teilbarkeitsregeln für natürliche Zahlen bis 20:

Die Zahl ist teilbar durch ...	genau dann, wenn ...
12	ihre Quersumme durch 3 teilbar ist und die aus den letzten beiden Ziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.
15	ihre Quersumme durch 3 teilbar ist und sie auf 0 oder 5 endet.
16	die aus den letzten vier Ziffern gebildete Zahl durch 16 teilbar ist.
18	sie gerade ist und ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
20	die vorletzte Ziffer gerade und die letzte Ziffer eine 0 ist.

M 4 Prim, aber lückenhaft – Primzahlen mit Termen erzeugen

I/A

Der berühmte Schweizer Mathematiker **Leonard Euler** (1707–1783) entdeckte zwei Terme, die jeweils nach dem Einsetzen natürlicher Zahlen Primzahlen erzeugen.

Es handelt sich um die Terme

$$n^2 + n + 17 \text{ für } 0 < n < 16$$

und

$$n^2 - n + 41 \text{ für } 0 < n < 41.$$



Leonhard Euler, Pastell von Emanuel Handmann, 1753 (Kunstmuseum Basel)

Aufgabe

a) Bestätige die Euler'sche Entdeckung für $0 < n < 9$.

Tipp Setze die natürlichen Zahlen von $n = 1$ bis $n = 8$ in die beiden Terme ein.

Übertrage die nachfolgende Tabelle in dein Heft, vervollständige sie und vergleiche die erzeugten Primzahlen mit der Primzahlentabelle bis 97.

Beschreibe, was dir auffällt.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$n^2 + n + 17$								
$n^2 - n + 41$								

Tipp Die Primzahlen bis 97 lauten:

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	67	71
73	79	83	89	97

b) Begründe jeweils durch geeignete Termumformung, warum der Term

- $n^2 + n + 17$ für $n = 16$ und $n = 17$
- $n^2 - n + 41$ für $n = 41$ keine Primzahl liefern kann.

c) Zeige, dass es nur ein einziges gemeinsames n gibt, für das beide Terme denselben Wert ergeben. Gib dieses $n \in \mathbb{N}$ mit dem zugehörigen Wert an.

Tipp Suche im Internet eine geeignete Primzahlentabelle und überzeuge dich, dass der angegebene Wert eine Primzahl ist.

Reihe 17	Verlauf	Material S 8	LEK	Glossar	Lösungen
----------	---------	-----------------	-----	---------	----------

M 8 In vielen Zahlen steckt Besonderes – teste dein Wissen!

I/A

Meine gezogene Zahl ist _____

eine Primzahl.	
eine Mirpzahl.	
Bestandteil eines Primzahlzwillings.	
eine Fast-Primzahl.	
eine defiziente Zahl.	
eine vollkommene Zahl.	
eine abundante Zahl.	
eine Fakultät.	
eine Dreieckszahl.	
eine Quadratzahl.	
eine Kubikzahl.	
eine Tetraederzahl.	
eine Germain'sche Primzahl.	
Bestandteil einer befreundeten Zahl.	

Name, Vorname, Klasse

Datum

Gezogene Zahl

Aufgabe

Kennzeichne die genannten Eigenschaften, die deine gezogene Zahl besitzt, in der rechten Spalte mit Ja (J) oder Nein (N). Schreibe deine Rechnungen auf die Rückseite dieses Testbogens. Sobald du mit der Bearbeitung fertig bist, gib deinen Testbogen ab, lass dir einen neuen Testbogen geben, ziehe die nächste Zahl und beginne von vorn. Für jede richtig genannte Eigenschaft bekommst du einen Punkt.

Viel Erfolg!

Nur von der Lehrkraft auszufüllen.	Erreichte Punktzahl:		von		Punkten
------------------------------------	----------------------	--	-----	--	---------