„Find someone who …" – Übungen zur analytischen Geometrie

Hendrik Josch-Pieper, Oberhausen

Eine Konstruktion aus Geraden, Ebenen und Querverbindungen: Tetraeder 4, Bottrop

Klasse:	12
Dauer:	8 Stunden
Inhalt:	Übungen zur linearen Algebra und analytischen Geometrie, Vorbereitung auf das Abitur
Ihr Plus:	Methode aus dem kooperativen Lernen, Binnendifferenzierung

Die „Find someone who …"-Materialien aktivieren alle Schüler Ihres Mathematik-Grund- oder Leistungskurses. Durch ihren Einsatz fördern Sie die Entwicklung von Rechenstrategien. Ihre Schüler entwickeln Problemlösefertigkeit auf dem Gebiet der analytischen Geometrie. Die Aufgaben haben unterschiedliche Schwierigkeitsniveaus. Austausch- und Erklärungsphasen bereiten Ihre Schüler gezielt auf die mündliche Prüfung im Fach Mathematik vor.

Auf einen Blick

Niveau 1

Material	Thema	Stunde
M 1	**3-D-Koordinatensystem und Vektoren** Zeichnen und Ablesen von Punkten und Vektoren im Raum	1.
M 2	**Gleichungssysteme** Aufstellen und Lösen von Gleichungssystemen; unter- und überbestimmte Gleichungssysteme	2.
M 3	**Verschiebungen im Raum** Vektoren in der Anwendung in der Ebene und im Raum	3.

Niveau 2

Material	Thema	Stunde
M 4	**Geraden im Raum – die Parameterform** Rechnungen an Geraden im Raum	4.
M 5	**Ebenengleichungen in verschiedenen Formen** Aufstellen von Gleichungen und Berechnungen an Ebenen im Raum	5.

Niveau 3

Material	Thema	Stunde
M 6	**Lagebeziehungen Gerade–Ebene** Rechnerische Untersuchungen zwischen Geraden und Ebenen	6.
M 7	**Lagebeziehungen von Ebenen zu Geraden / Ebenen** Weitere Untersuchungen zwischen Ebenen und Geraden	7.
M 8	**Winkel und Abstände** Das Skalarprodukt in der Anwendung: Bestimmung von Winkeln und Abständen; Hesse'sche Normalenform	8.

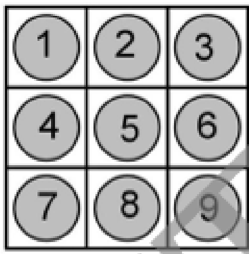
Die Stundenangaben beziehen sich auf ein Abarbeiten der Aufgaben in chronologischer Reihenfolge. Die „Find someone who ...“-Methode erlaubt Ihnen dagegen, eine **Binnendifferenzierung** nach Niveau 1, 2 und 3 vorzunehmen. Legen Sie dazu drei entsprechende Stapel auf der Fensterbank aus. Die leistungsschwächeren Schüler suchen jemanden, der ihnen eine Aufgabe des Niveaus 1 erklärt, die leistungsstärkeren jemanden mit Niveau 2 und die Experten lösen gemeinsam Niveau 3.

Minimalplan

Die Materialien sind voneinander unabhängig. Deshalb können Sie sie einzeln einsetzen.

M 3 Verschiebungen im Raum

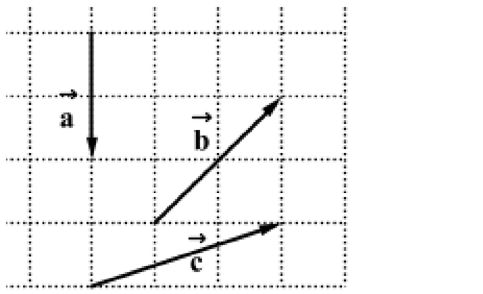
Finden Sie jemanden, der ...



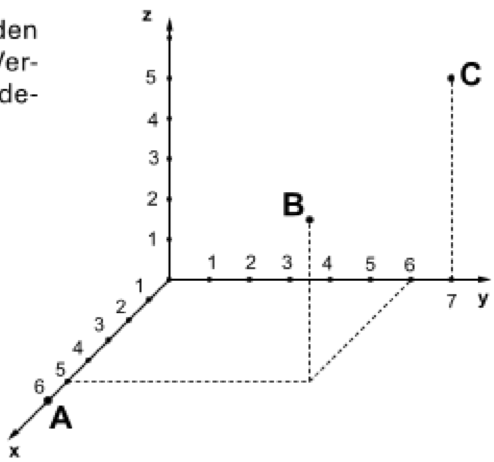
... sich mit **Vektoren** auskennt und Ihnen die Lösung einer Aufgabe vorstellt. Kontrollieren Sie die vorgeschlagene Bearbeitung. Diskutieren Sie gegebenenfalls miteinander.

Aufgaben

1. Verschieben Sie den Punkt **A(2|7|–3)** um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$.
   Geben Sie die Koordinaten des Bildpunktes an.
2. Ein Punkt B wurde auf den Punkt B′ verschoben. Ermitteln Sie die Koordinaten des Verschiebungsvektors.
   B(–2|–7|3); B′(3|3|3)
3. Zeichnen Sie ein zweidimensionales Koordinatensystem mit einer Achsenlänge von jeweils 6 cm. Dabei entspricht 1 cm einer Einheit. Zeichnen Sie jeweils drei Pfeile der folgenden Verschiebungsvektoren. Wählen Sie dazu jeweils drei verschiedene Fußpunkte.
   $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
4. Der Punkt C′ ist aus einer Verschiebung aus dem Punkt C entstanden. Ermitteln Sie die Verschiebungskoordinaten:
   C′(7|10|–30); C(1|1|1)
5. Die folgenden Pfeile stellen Vektoren dar.
   Zeichnen Sie einen Pfeil, der sich jeweils aus der angegebenen Addition ergibt.
   $\vec{a} + \vec{b}$
   $\vec{a} + \vec{c}$
   $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



6. Berechnen Sie für A(2|–3|5), B(0|3|0) und C(4|4|4) die Koordinaten von
   $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
   $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}$
7. Betrachten Sie das Koordinatensystem mit den eingetragenen Punkten. Bestimmen Sie die Verschiebung, mit der ein Punkt auf den jeweils anderen abgebildet werden kann, wobei
   A(6|0|0),
   B(5|6|4) und
   C(0|7|5).



M 7 Lagebeziehungen von Ebenen zu Geraden / Ebenen

Finden Sie jemanden, der ...

... sich mit **vektorieller Geometrie** auskennt und Ihnen eine Aufgabe vorrechnet und erklärt. Kontrollieren Sie die vorgeschlagene Lösung. Diskutieren Sie mit Ihrem Partner ggf. über den Lösungsvorschlag.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der beiden Ebenen E und F. Geben Sie ggf. auch die **Schnittgerade** an.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad v, w \in \mathbb{R} \qquad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

2. Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Punkt **P(10|7|–3)** auf der Ebene mit der Parameterform E liegt.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

3. Bestimmen Sie die Lage der beiden Ebenen E und F.

$$E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \qquad F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

4. Schneidet die Gerade g die Ebene E? Bestimmen Sie evtl. auch den **Durchstoßpunkt**.

$$E: 3x_1 + x_2 - x_3 = -6; \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

5. Bestimmen Sie die Lage der beiden Ebenen E und F.

$$E: 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2; \qquad F: -4x_1 + 6x_2 - 10x_3 = -8$$

6. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die beiden Geraden <u>windschief</u> zueinander sind.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v \in \mathbb{R}; \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$

7. Gegeben sind die Ebenen E und F in **Koordinatenform**. Bestimmen Sie die Schnittgerade.

$$E: x_1 + 2x_2 - x_3 = -2; \qquad F: 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4$$

8. Schneidet die Gerade g die Ebene E? Bestimmen Sie evtl. auch den **Durchstoßpunkt**.

$$E: x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1; \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}$$