

## Aufbau der Zahlbereiche

# Eine Lernwerkstatt zum Thema „Bruchrechnung“ – anschauliche Beispiele zum Verständnis

Carsten Trost, Hamburg

Illustrationen von: Julia Lenzmann



© RAABE 2019

Grafik: J. Lenzmann

Was soll man sich eigentlich unter Brüchen vorstellen? Und wieso sind die Rechengesetze logisch? Anschauliche Grundvorstellungen statt auswendig gelernter Formeln helfen Ihren Schülern dabei, ein tiefes Verständnis des Themas *Bruchrechnung* zu erreichen. Abwechslungsreich gestaltet mittels haptischer Aufgaben und Partnerarbeit entdecken Ihre Schüler Zusammenhänge und Verallgemeinerungen – dokumentiert und reflektiert durch ein selbst geführtes Lerntagebuch.

### KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe/Lernjahr:</b>	5/6 (G8)
<b>Dauer:</b>	10 Unterrichtsstunden
<b>Kompetenzen:</b>	Grundvorstellungen zu Brüchen erwerben
<b>Thematische Bereiche:</b>	1. Größe, 2. Vorkommen im Alltag, 3. Aufteilen mit Brüchen, 4. echte und unechte Brüche, 5. Brüche in natürliche Zahlen umwandeln
<b>Medien:</b>	Texte, Bilder

## Didaktisch-methodische Hinweise

### Das Konzept der Lernwerkstatt

Allgemein gesagt, ist eine Lernwerkstatt ein virtueller Ort mit Werkzeug und Material, der selbstständiges Lernen ermöglicht und dazu anregt. Diese Lernwerkstatt ist ähnlich dem **Stationenlernen** angelegt, jedoch über einen längeren Zeitraum. Ihre Schüler arbeiten hier selbstständig an verschiedenen Stationen. Dabei müssen sie über mathematische Sachverhalte nachdenken, experimentieren, Regeln und Zusammenhänge entdecken und Aufgaben lösen. So erarbeiten sie sich selbstständig anschauliche Grundvorstellungen zum Thema *Bruchrechnung*. Am Ende jeder Station finden sich Aufgaben zur **Selbstkontrolle**. Zusätzlich sollen die Schüler zu der Lernwerkstatt ein **Lerntagebuch** führen, in dem das Thema erklärt und damit reflektiert wird.

### Die Einführungsstunde

In der ersten Stunde verteilen Sie die Stationen der Lernwerkstatt sinnvoll im Klassenraum. Entweder legen Sie die Stationen auf Tischen aus, oder Sie befestigen diese mit Klebestreifen an den Wänden. Stellen Sie nicht von Anfang an alle Stationen bereit, sondern zunächst nur **M 4** (diese aber mehrfach). Ergänzen Sie die Stationen dem Arbeitstempo der schnellsten Schüler entsprechend. Teilen Sie die Materialien **M 1** und **M 2** an die Schüler aus und erklären Sie den Ablauf der gesamten Lernwerkstatt. Dabei legen Sie den Abgabetermin für das Lerntagebuch fest und die Schüler notieren diesen auf dem Deckblatt des Lerntagebuchs (**M 1**). Die Lernenden überlegen gemeinsam, welche Regeln für eine sinnvolle Arbeit in der Lernwerkstatt nötig sind. Sammeln Sie diese Regeln an der Tafel und ergänzen Sie gegebenenfalls. Die ergänzten Regeln schreiben die Schüler dann ebenfalls auf das Deckblatt ihres Lerntagebuchs. Achten Sie darauf, dass zumindest folgende Regeln besprochen und aufgeschrieben werden:

- Ich renne und tobe nicht herum.
- Ich arbeite ruhig und konzentriert an den Stationen.
- Ich beschreibe, beschädige oder beschmutze nicht die Lerntagebücher meiner Mitschüler.
- Ich achte selbstständig darauf, dass ich die Stationen in der vorgegebenen Zeit schaffe.
- Ich arbeite regelmäßig zu Hause am Lerntagebuch weiter, weil die Zeit sonst nicht ausreicht.

Zuletzt machen Sie Ihre Erwartungen und Bewertungskriterien bezüglich des Lerntagebuchs transparent, zum Beispiel mithilfe der Bewertungsübersicht des Lerntagebuchs (**M 2**). Danach erhält jeder Schüler die Lerntagebuchvorlage **M 3** in **siebenfacher** Kopie und beginnt die Arbeit in der Lernwerkstatt.

### Die weiteren Stunden – Arbeiten in der Lernwerkstatt

Die Schüler arbeiten zunächst an der ersten Station, welche mehrfach ausliegt. Sie bearbeiten die Aufgaben in einer Kladde. Dabei dürfen sie sich gerne gegenseitig helfen, allerdings müssen trotzdem alle Aufgaben selbst abgearbeitet und die zugehörigen Lösungen notiert werden. Wurde der **Teste-dich-selbst-Teil** der Station erfolgreich gelöst, schreiben die Schüler zu dieser Station eine Seite des Lerntagebuchs, inklusive selbst ausgedachter Aufgaben. Es geht weiter mit der nächsten Station.

Die Stationen der Stufe II können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Dadurch sollten sich die Schüler so verteilen, dass ein Exemplar jeder Station ausreicht. Anschließend bearbeiten die Schüler ebenso die Stationen der Stufe III. Die Lösungen zu den Aufgaben hängen Sie an die zunächst verdeckte Tafel. Ihre Schüler kontrollieren die Lösungen zu den Aufgaben selbstständig.

### Symbole in der Lernwerkstatt

In der Lernwerkstatt sind die Aufgaben der einzelnen Stationen mit vier immer wiederkehrenden Symbolen gekennzeichnet. Diese Symbole geben den Schülern Orientierung, worum es geht und in welcher Arbeitsform gearbeitet werden muss.



← Hier finden Ihre Schüler wichtige Informationen und Merksätze.

Hier müssen die Lernenden Zusammenhänge herstellen oder knifflige Fragen beantworten. →



← Für diese Aufgaben müssen die Schüler mit einem Übungspartner zusammenarbeiten.

Hier müssen sie basteln oder zeichnen. →



### Die Rolle des Lehrers in der Lernwerkstatt

Sie haben in der Lernwerkstatt lediglich eine beratende und unterstützende Funktion. Wenn Ihre Schüler eigenständiges Arbeiten nicht gewohnt sind, werden zu Beginn der Lernwerkstatt viele Fragen auf Sie zukommen. Halten Sie sich mit Erklärungen zurück. Geben Sie lediglich Tipps (Prinzip der minimalen Hilfestellung) und verweisen Sie auf anschauliche Zeichnungen und Basteleien, wenn ein Schüler nicht weiterkommt. Bestätigen Sie aber ausdrücklich richtige Ideen und Lösungen. Schon nach wenigen Unterrichtsstunden wird die Flut der Fragen abebben. Nutzen Sie nun die Zeit, um den Lernerfolg Ihrer Schüler zu kontrollieren und etwaige fehlerhafte Vorstellungen zu entdecken. Lesen sie dazu die unfertigen Lerntagebücher und suchen Sie Gespräche mit Schülern.

### Nach der Lernwerkstatt: die Leistungsbewertung

Sie haben mehrere Möglichkeiten zur Leistungsbewertung. Neben der Mitarbeit in der Lernwerkstatt und dem Einhalten der entsprechenden Regeln können Sie das Lerntagebuch an sich bewerten (**M 2**). Zusätzlich möchten Sie vielleicht einen Test (z. B. **M 11 & M 12**) oder eine Klassenarbeit an die Lernwerkstatt anschließen. In jedem Fall sollten Sie an die selbstständige Arbeit in der Lernwerkstatt noch eine Phase des gemeinsamen Zusammenfassens und Übens anhängen.

### Alternativer Einsatz

Wenn Ihnen das Konzept der Lernwerkstatt nicht zusagt oder Sie keine Bewegung im Klassenraum wünschen, dann kopieren Sie die Stationen als Arbeitsblätter für jeden Schüler einzeln. Ebenso können Sie auf das Erstellen eines Lerntagebuchs verzichten. Lassen Sie dazu das Material **M 1–M 3** weg, und sichern Sie den Lernzuwachs einfach mit Ihren üblichen Methoden im Unterricht.

## Auf einen Blick

### 1. Stunde

<b>Thema:</b>	Material für das Lerntagebuch
<b>M 1 (Ab)</b>	<b>Deckblatt für das Lerntagebuch</b> Zur Übersicht aller Stationen und Regeln
<b>M 2 (Ab)</b>	<b>Bewertungskriterien</b> für das Lerntagebuch Hilfe beim Schreiben des Lerntagebuchs; schafft Transparenz
<b>M 3 (Ab)</b>	<b>Lerntagebuch</b> Blanko-Formatvorlage für die Schüler
<b>Benötigt:</b>	<input type="checkbox"/> OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard und Scheren

### 2.–10. Stunde

<b>Thema:</b>	Stationenzirkel zum Thema Bruchrechnen
<b>M 4 (Ab)</b>	<b>Was ist ein Bruch? (Stufe I)</b> Bruch als Teil eines Ganzen begreifen; Bedeutung von Zähler und Nenner kennenlernen; richtiges Aussprechen von Brüchen üben
<b>M 5 (Ab)</b>	<b>Brüche, die du schon kennst (Stufe II)</b> Diverse Bezüge zum Alltag kennenlernen; mit Uhrzeiten, Längen und Geld rechnen; Bekanntes verknüpfen
<b>M 6 (Ab)</b>	<b>Brüche als Hilfe zum Verteilen (Stufe II)</b> Zusammenhang zwischen Bruch und Division; Anwenden von Brüchen zum Verteilen; Bruch als Teil mehrerer Ganzer begreifen
<b>M 7 (Ab)</b>	<b>Brüche als Maschinen (Stufe II)</b> Vorstellung der Größe von Brüchen erlangen; Größenvergleiche bei einfachen Brüchen durchführen
<b>M 8 (Ab)</b>	<b>Echte und unechte Brüche (Stufe III)</b> Vorstellung von unechten Brüchen erlangen; Zusammenhang zwischen Brüchen und ganzen Zahlen begreifen
<b>M 9 (Ab)</b>	<b>Gleichwertige Brüche (Stufe III)</b> Gleichwertige Brüche erkennen; Erfahrungen mit dem Erweitern von Brüchen sammeln
<b>M 10 (Ab)</b>	<b>Brüche und ganze Zahlen (Stufe III)</b> Gemischte Zahlen kennenlernen; Brüche und gemischte Zahlen ineinander umwandeln
<b>M 11/12 (Ab)</b>	<b>Test: Grundlagen der Bruchrechnung (Variante A &amp; B)</b> Leistungsüberprüfung der gesamten Lernwerkstatt
<b>Benötigt:</b>	<input type="checkbox"/> kleine Zettel in unterschiedlicher Form und Scheren

## Stufe I: Was ist ein Bruch?

M 4



Ein Bruch ist ein Teil von einem Ganzen.

So sieht ein Bruch aus:  $\frac{3}{4} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$

Unten steht der **Nenner**: Er sagt uns, in wie viele Bruchteile wir das Ganze geteilt haben. Oben steht der **Zähler**: Er sagt uns, wie viele Stücke von den Bruchteilen wir gerade vor uns haben. Dazwischen ist der sogenannte **Bruchstrich**, um die beiden zu trennen.



**Beispiele:**

$\frac{1}{4}$  bedeutet, dass wir etwas in 4 Teile aufteilen und noch 1 davon haben.

$\frac{2}{4}$  bedeutet, dass wir etwas in 4 Teile aufteilen und noch 2 davon haben.

$\frac{3}{4}$  bedeutet, dass wir etwas in 4 Teile aufteilen und noch 3 davon haben.

### Aufgabe 1

Nimm dir ein Stück Papier. Falte das Papier so, dass dadurch gleich große Stücke entstehen. Schneide von deinem gefalteten Papier einen Teil entlang der Faltkanten ab. Schreibe auf jeden der beiden Teile den passenden Bruch.

Wiederhole diese Aufgabe noch mit mindestens drei weiteren Papieren.

Versuche, unterschiedliche Möglichkeiten zum Falten und Abschneiden zu finden. Zeichne mindestens 5 verschiedene geometrische Formen auf einen Zettel (z. B. Kreis, Rechteck, Quadrat ...).

Zeichne dann für jede Form eine andere Möglichkeit ein, wie du sie falten würdest (zum Beispiel mit Linien). Färbe ein paar Bruchteile in der gleichen Farbe und schreibe einen Bruch hinein, der alle gefärbten Bruchteile zusammen beschreibt.

Schreibe auf den nicht gefärbten Rest auch einen passenden Bruch für den ungefärbten Teil.



**Beispiel:**



### Aufgabe 2

In einer Bäckerei kann man nicht nur ganze Brote kaufen. Man kann zum Beispiel

auch  $\frac{1}{2}$  Brot oder  $\frac{3}{4}$  Brot kaufen.

- a) Wenn der Bäcker sein Brot in mehrere Teile (z. B. 3 Teile) zerschneidet, wohin gehört dann diese Zahl („3“) bei dem Bruch? Zähler oder Nenner?



## Stufe II Brüche, die du schon kennst

M 5

Du kennst sicher schon viele Brüche aus dem Alltag. Zum Beispiel redet man oft über *eine halbe Stunde* oder *eine Viertelstunde*.



### Aufgabe 1

Fallen dir noch andere Beispiele ein, wo Brüche in deinem Alltag vorkommen?

### Aufgabe 2



Ein bestimmtes Spielzeug in einem Kaufhaus kostet normalerweise 10 Euro. Nun hängt das Kaufhaus solche Schilder aus:



Wie viele Euro kostet das Spielzeug jetzt?

Wie viele Euro kosten folgende Sachen, wenn du das Schild mit einrechnest?

Fußball – Normalpreis 8 Euro

Jeans – Normalpreis 40 Euro

Buntstifte – Normalpreis 2,5 Euro

PS4 – Normalpreis 120 Euro

### Aufgabe 3



Man kann Zeitangaben in Brüchen angeben. Sicher weißt du, wie viele Minuten eine halbe Stunde hat, wie viel eine Viertelstunde hat usw. Nimm dir ein rundes Stück Papier und stelle es dir als Uhr vor.

Der gesamte Kreis hat 60 Minuten. Nun falte das Papier so, dass du  $\frac{1}{2}$  Stunde

hast. Schreibe den passenden Bruch auf das Papier. Schreibe neben den Bruch auch, wie viele Minuten das sind.

Male eine Uhr in dein Heft. Sie soll aus 4 gleich großen Teilen bestehen. Färbe 3 der Bruchteile in der gleichen Farbe und überlege dir, welchen Bruch du darauf schreiben musst. Dann schreibe auch die richtige Anzahl an Minuten daneben.

### Aufgabe 4

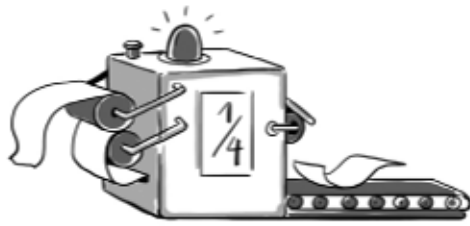


Frage einen Übungspartner, was Zähler und Nenner in einem Bruch bedeuten. Lerne die Bedeutung dieser beiden Begriffe auswendig!

## Stufe II Brüche als Maschinen

M 7

Du kannst dir einen Bruch auch als eine besondere Maschine vorstellen. Zum Beispiel haben wir hier die *Ein-Viertel-Maschine*:

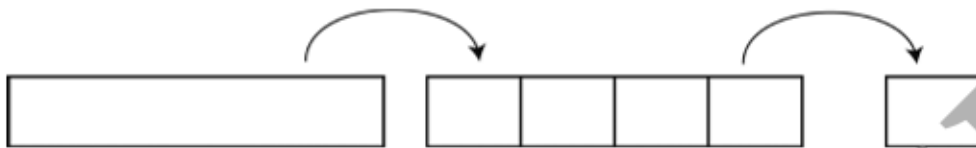


Diese Maschine tut Folgendes: Wenn man auf der linken Seite einen Papierstreifen in die Maschine steckt, dann zerschneidet die Maschine das Papier in 4 **gleich lange** Stücke. Von diesen 4 Stücken kommt aber **nur ein Stück** wieder auf der rechten Seite der Maschine heraus.

In der Maschine

In vier Teile geteilt

Ein Teil kommt heraus



### Aufgabe 1



Was hat die Arbeit der Bruch-Maschine mit **Zähler** und **Nenner** zu tun? Welcher Arbeitsschritt gehört zum Nenner? Welcher zum Zähler? Erkläre in deinem Lerntagebuch.

Nimm dir einen Papierstreifen. Stelle dir vor, du steckst ihn in die *Ein-Viertel-Maschine*. Was passiert damit? Benutze deine Schere, und spiele die Arbeit der Bruch-Maschine nach.

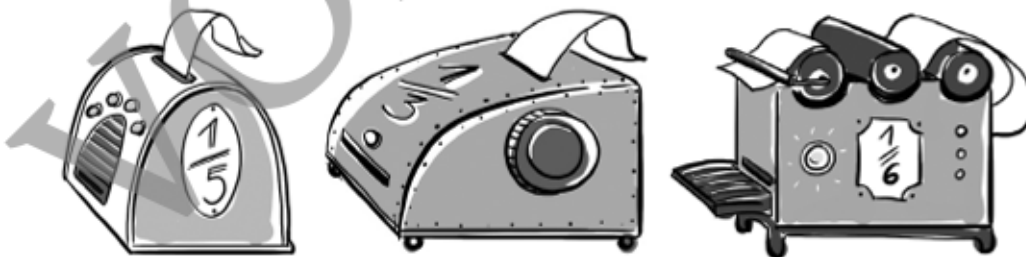
### Aufgabe 2



Unten siehst du Bilder von anderen Bruch-Maschinen. Überlege dir, was diese Maschinen tun – achte dazu genau auf ihre Namen. Spiele auch diese Maschinen mit Papier und Schere nach.

**Achtung:** Alle Papierstreifen sollen gleich lang sein, bevor sie in die Maschinen kommen.

Das Ausgabestück von welcher Bruchmaschine ist das längste?



## Stufe III Echte und unechte Brüche

**M 8**

Eine normale Zahl ohne Bruch nennen wir **ganze** Zahl. Sie bedeutet, dass wir ein **vollständiges** Stück von irgendetwas haben.



### Aufgabe 1



Vergleiche diese Aussage mit einem Bruch.  
Was ist der Unterschied zwischen Bruch und ganzer Zahl?  
Kann man auch mit Brüchen ein vollständiges/ganzes Stück darstellen?

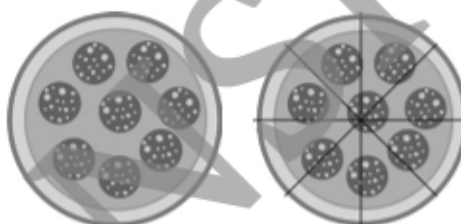


Stelle dir eine ganze Pizza vor: Wir schreiben dazu **1 Pizza**. Kann man das auch als Bruch schreiben?

Teile die Pizza dazu in 8 Teile. Wie viele von den Teilen musst du nehmen, damit du wieder die ganze Pizza zusammenhast?

Richtig, du musst 8 Teile nehmen. Der Bruch  $\frac{8}{8}$  ist also genauso groß wie die ganze Pizza. Wir dürfen deshalb schreiben:

$$\frac{8}{8} \text{ Pizza} = 1 \text{ Pizza}$$



### Aufgabe 2

Suche noch mindestens fünf andere Möglichkeiten, wie du **1 Pizza** als Bruchzahl darstellen kannst. Nimm dir dafür Papier zum Falten oder mache ein paar Zeichnungen.



### Aufgabe 3

Bespreche mit einem Übungspartner: Welche der folgenden Brüche sind in Wirklichkeit ein Ganzes?



$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{14}{16}, \frac{16}{16}, \frac{5}{10}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{5}$$

## Stufe III Brüche und ganze Zahlen

**M 10**

### Aufgabe 1



Zeichne den Bruch  $\frac{4}{4}$ .

Wie du siehst, ist dieser Bruch eigentlich kein Bruch, sondern ein Ganzes.

Man darf den Bruch  $\frac{4}{4}$  also auch einfach als Zahl schreiben:  $\frac{4}{4} = 1$ . Wenn

du das schwierig findest, arbeite zuerst die Station *Echte und unechte Brüche* durch, dort kannst du das noch genauer lernen.

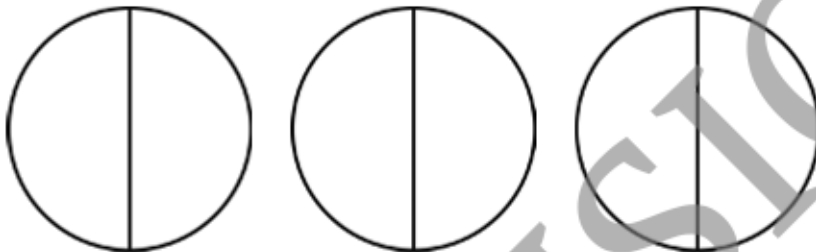


### Aufgabe 2

Welche ganze Zahl kannst du für den Bruch  $\frac{8}{4}$  schreiben? Versuche auch diesen Bruch zu zeichnen.

**Tipp:** Du brauchst dafür mehr als ein Ganzes!

**Merke:**



Hier wurden 3 ganze Torten in Hälften geschnitten. Als Bruch kann man das so schreiben: Die Torten wurden jeweils in 2 Teile geschnitten, also muss der Nenner 2 sein. Und es sind 6 Tortenstücke vorhanden, also muss der Zähler 6 sein.

Unser Bruch ist also  $\frac{6}{2}$  und steht für 3 ganze Torten:  $\frac{6}{2} = 3$ .

### Aufgabe 3



Wie viele Ganze enthält der Bruch  $\frac{9}{3}$ ?

### Aufgabe 4



Ergänze den folgenden Merksatz in deinem Lerntagebuch:

„Wenn der Zähler eines Bruchs zum Beispiel ...-mal so groß ist wie der Nenner, dann enthält der Bruch ... Ganze. Allgemein enthält ein Bruch so viele Ganze, wie sein ... ein Vielfaches des ... ist.“

## Erläuterungen und Lösungen

### M 1 – M 3 Das Lerntagebuch

Tipps zum Einsatz stehen in den didaktisch-methodischen Hinweisen unter *Die Einführungsstunde*.

### M 4 Was ist ein Bruch?

Legen Sie diese Station in mehrfacher Ausführung aus (ca. eine Station pro 5 Schüler), da alle Schüler gleichzeitig an dieser Station beginnen.

Die Schüler benötigen mehrere kleine Papierstücke in unterschiedlichen Formen für diese Station (z. B. Quadrate, Rechtecke, Kreise).

#### Lösungen

- Es sind unterschiedlichste Schülerlösungen möglich. Achten Sie drauf, dass bei den gefalteten und gezeichneten Brüchen wirklich alle Bruchteile gleich groß sind und die korrekten Brüche draufgeschrieben wurden, z. B.:
- Die Gesamtanzahl der Brotstücke gehört in den Nenner und die Anzahl der verkauften Brotstücke in den Zähler. Andersherum bedeutet z. B. der Bruch  $\frac{5}{6}$ , dass das Brot in 6 Stücke zerschnitten wurde, wovon 5 Stücke verkauft wurden.
- Achten Sie auf die richtige Aussprache der Schüler, besonders beim Bruch *ein halb*, der oft fälschlicherweise als *ein Zweitel* ausgesprochen wird.



### M 5 Brüche, die du schon kennst

Die Schüler benötigen mehrere runde Papierstücke für diese Station, um Bruchuhren zu basteln. Alternativ verzichten Sie auf das Basteln, lassen Sie diese nur zeichnen.

#### Lösungen

- Zum Beispiel bei Geld, Rabatten, Längenangaben, Zeitangaben ...
- Spielzeug – 5 Euro; Fußball – 4 Euro; Jeans – 20 Euro;  
Buntstifte – 1,25 Euro; PS4 – 60 Euro
- So sollten die Papierstücke aussehen:
- Fragen Sie im Verlauf der Unterrichtsstunden ebenfalls einige Schüler nach der Bedeutung von Zähler und Nenner.
- Verschiedene Schülerlösungen sind möglich. Achten Sie darauf, dass die Bruchteile in einer Uhr jeweils gleich groß gezeichnet sind.

