

II.A.34

Analysis

Das Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung – Klimaneutralität in Deutschland?

Ein Beitrag von Johann-Georg Vogelhuber



Das Newtonnäherungsverfahren ist ein numerisches Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen von differenzierbaren Funktionen. Im Unterricht kann dieses Verfahren gut mit einer Tabellenkalkulationssoftware umgesetzt werden. Auf diese Weise können digitale Kompetenzen in Verbindung mit mathematischen Inhalten aufgebaut und vertieft werden. Der Beitrag baut auf einer beispielhaften Anwendungssituation mit Bezug zur CO₂-Emission in Deutschland auf, sodass ein handlungs- und problemorientierter Unterricht gestaltet werden kann.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11–13
Dauer:	2–4 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematisch Probleme lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit den symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Zusatzmaterialien:	Excel-Dateien

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Info: Fachtext

Einstieg

M 1 (Info) Einstieg: CO₂-Emissionen in Deutschland

Erarbeitung

M 2 (Info) Das Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung

M 3 (Info) Beispiel zur Umsetzung des Newtonverfahrens mit Excel

M 4 (Ab) Umsetzung des Newtonverfahrens mit Excel

Übung

M 5 (Ab) Übungsaufgaben zur Vertiefung

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden mit den folgenden Materialien:

M 1 (Info) Einstieg: CO₂-Emissionen in Deutschland

M 2 (Info) Das Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung

M 3 (Info) Beispiel zur Umsetzung des Newtonverfahrens mit Excel

M 4 (Ab) Umsetzung des Newtonverfahrens mit Excel

Erklärung zu Differenzierungssymbolen

	Tauchen diese Symbole auf, sind die Materialien differenziert. Es gibt drei Niveaustufen, wobei nicht jede Niveaustufe extra ausgewiesen wird.		
			
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau	

	Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.
	Dieses Symbol markiert alternative Möglichkeiten.



CD 81

Einstieg: CO₂-Emissionen in Deutschland

M 1

Klimaschutz: Deutschland bis 2038 klimaneutral?

Die Erderwärmung soll bei 1,5°C gestoppt werden. In die Atmosphäre darf deshalb nur noch eine begrenzte Menge an CO₂ gelangen.

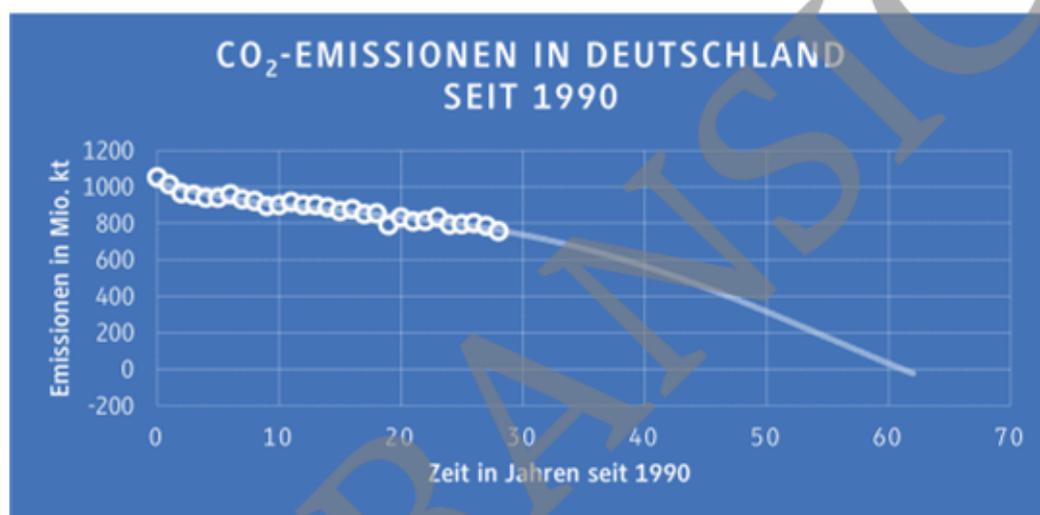
Allerdings scheint die deutsche Klimapolitik im Moment nicht auf das Pariser Klimaabkommen ausgerichtet zu sein. Das Umweltgutachten 2020 des Sachverständigenrates für Umweltfragen (SRU), der die Bundesregierung berät,

bescheinigt der Politik, dass diese in Klimafragen nicht „ausreichend auf Zielkurs“¹ läge.

Um die Erderwärmung auf 1,75°C zu begrenzen, müsse eine Klimaneutralität bis spätestens 2038 erreicht werden. Ziel der Bundesregierung ist jedoch eine weitestgehende Klimaneutralität bis 2050. Das folgende Diagramm zeigt die CO₂-Emissionen in Deutschland seit 1990. Dabei entspricht der Zeitpunkt $t = 0$ dem Jahr 1990.



© DisobeyArt/Stock/Getty Images Plus



Grafik: Johann-Georg Vogelhuber nach Daten des Umweltbundesamtes²

Eine Analyse der vorliegenden Emissionsdaten, in Verbindung mit den eingeleiteten Maßnahmen, liefert die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{10000}t^4 - \frac{7}{400}t^3 + \frac{7}{10}t^2 - 17t + 1020,$$

die eine Prognose der zukünftigen CO₂-Emissionen erlaubt. Dabei ist t die Zeit in Jahren seit 1990 und $f(t)$ der CO₂-Ausstoß in Millionen kt.

¹ Umweltgutachten 2020: https://www.umweltrat.de/SharedDocs/Downloads/DE/01_Umweltgutachten/2016_2020/2020_Umweltgutachten_Entschlossene_Umweltpolitik.html;jsessionid=1B74625BE17D15EA15E4C-228F5394E8E.2_cid321 [zuletzt abgerufen am 13.01.2021]

² Umweltbundesamt: https://www.umweltbundesamt.de/sites/default/files/medien/384/bilder/dateien/1-3_dzu_thg-emissionen_0.xlsx [zuletzt abgerufen am 13.01.2021]

Das Newtonverfahren zur Nullstellenbestimmung

M 2



© popovaphoto/Stock/Getty Images Plus

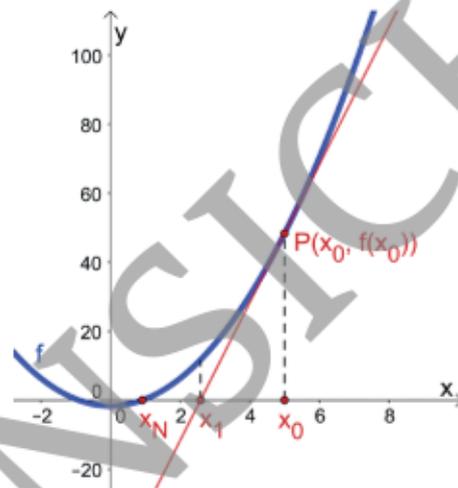
Zur Bestimmung von Nullstellen ganzrationaler Funktionen führen Standardverfahren wie pq-Formel oder Polynomdivision nicht immer zum Ziel. Um trotzdem Nullstellen bestimmen zu können, kann man zunächst mithilfe einer Skizze ungefähr eine Nullstelle ablesen.

Ein mathematisches **Näherungsverfahren**, wie beispielsweise das Newtonverfahren, liefert dann einen angenäherten Wert für eine Nullstelle. Je öf-

ter man das Verfahren wiederholt, desto näher kommt man an den tatsächlichen Wert der Nullstelle.

Das Prinzip des Newtonverfahrens beruht darauf, eine Tangente an einen Kurvenpunkt $P(x_0 | f(x_0))$ zu legen, wobei der Wert von x_0 in der Nähe der tatsächlichen Nullstelle liegt.

Der Schnittpunkt der Tangente mit der x -Achse liegt in der Regel näher am tatsächlichen Wert der Nullstelle und wird als verbesserte Näherung für die Nullstelle angesehen. Dies entspricht dem Wert x_1 in der Abbildung. Führt man das Verfahren erneut durch, nun mit dem Punkt $P(x_1 | f(x_1))$, so erhält man die Stelle x_2 , die eine weiter verbesserte Näherung für die Nullstelle darstellt. Eine Wiederholung des Verfahrens führt unter der Voraussetzung, dass das Verfahren konvergiert, zu einer Folge von Näherungen, deren Grenzwert x_N die tatsächliche Nullstelle ist.



Erklärvideo

Link:

<https://raabe.click/ma-newton>

Merke

Die **Newtonsche Näherungsformel** lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Dabei ist x_n ein Näherungswert für die Nullstelle, x_{n+1} eine verbesserte Näherung, $f(x_n)$ der Funktionswert an der Stelle x_n sowie $f'(x_n)$ der Wert der Ableitung von f an der Stelle x_n .

Aufgabe 1

Erläutern Sie mit eigenen Worten, wie man aus der Näherung x_1 die nächste verbesserte Näherung x_2 berechnen kann. **Zeichnen** Sie dazu die Tangente zur Bestimmung von x_2 mit in das obige Diagramm ein.

Aufgabe 2

Führen Sie das Näherungsverfahren für die Funktion $f(x) = x^3 - 8$ und den Startwert $x_0 = 2,5$ durch. Berechnen Sie dabei x_1 , x_2 , x_3 und x_4 .

M 3 Beispiel zur Umsetzung des Newtonverfahrens mit Excel

Als Beispielfunktion im vorliegenden Excel-Arbeitsblatt wird $f(x) = 1,6x^3 - 0,8x - 2,2$ für die Anwendung des Newtonverfahrens gewählt.

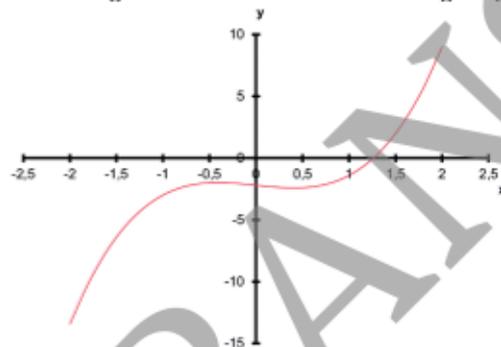
- Die Koeffizienten der Funktion werden in die Felder B8 bis G8 eingetragen, wobei für nicht vorhandene Potenzen der Koeffizient 0 eingetragen wird:

Allgemeine Funktionsgleichung: $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$					
a =	b =	c =	d =	e =	f =
0	0	1,6	0	-0,8	-2,2

- Die Koeffizienten für die Ableitungsfunktion werden automatisch berechnet:

Funktionsgleichung der Ableitung: $f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2 + 2dx + e$				
$5 \cdot a =$	$4 \cdot b =$	$3 \cdot c =$	$2 \cdot d =$	e =
0	0	4,8	0	-0,8

- Nun muss ein geeigneter Startwert als 0-te Näherung bestimmt werden. Dazu kann unter der Überschrift „Wertetabelle“ über die Eingabe von „Startwert“ und „Schrittweite“ eine Wertetabelle von $f(x)$ erzeugt werden. Auf Grundlage dieser Wertetabelle wird der Graph der Funktion skizziert. Im Fall der Beispielfunktion wird $x_0 = 2$ als Startwert gewählt und in das Feld M7 eingetragen.



Wertetabelle der Funktion f :

Startwert:	-2
Schrittweite:	0,2
x	f(x)
-2	-13,4
-1,8	-10,0912
-1,6	-7,4736
-1,4	-5,4704
-1,2	-4,0048
-1	-3
-0,8	-2,3792
-0,6	-2,0656
-0,4	-1,9824
-0,2	-2,0528
-2,77556E-16	-2,2
0,2	-2,3472
0,4	-2,4176
0,6	-2,3344
0,8	-2,0208
1	-1,4
1,2	-0,3952
1,4	1,0704
1,6	3,0736
1,8	5,6912
2	9

- Die mithilfe von Excel ermittelte Nullstelle liegt bei $x_N \approx 1,261083691$.

Die ersten 10 Schritte des Newton-Verfahrens

N	n-te Näherung
0	2
1	1,510869565
2	1,303177342
3	1,262575073
4	1,261085658
5	1,261083691
6	1,261083691
7	1,261083691
8	1,261083691
9	1,261083691
10	1,261083691

Umsetzung des Newtonverfahrens mit Excel

M 4

Aufgabe 1

Vervollständigen Sie in Partnerarbeit die Formeln in der Datei „M4 Newton Excel Vorlage.xlsx“ anhand der Beispielfunktion $f(x) = 1,6x^3 - 0,8x - 2,2$ so, dass die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion mithilfe des Newtonverfahrens bestimmt werden können. Versuchen Sie dabei die Formeln für die Zellen allgemeingültig zu lassen, damit man die Datei später auch auf andere Funktionen anwenden kann.



Tipp

- Vergessen Sie nicht, Ihre Änderungen regelmäßig zu speichern.
- Hinweise zur Bearbeitung der Aufgabenstellung finden Sie in der Vorlage-Datei.
- Nutzen Sie das Infoblatt „Beispiel zur Umsetzung des Newtonverfahrens mit Excel“ M 3 als Hilfe zur Vorgehensweise und zur Überprüfung von Zwischenergebnissen.



Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Nullstelle der Funktion $f(t) = \frac{1}{10000}t^4 - \frac{7}{400}t^3 + \frac{7}{10}t^2 - 17t + 1020$ im Intervall $[0, 60]$ mithilfe ihrer vervollständigten Excel-Datei aus Aufgabe 1.

Nutzen Sie Ihr Ergebnis zur Beantwortung der Einstiegsfrage.



Tipp

- Beginnen Sie mit dem Austausch der Koeffizienten in Zeile 8.
- Einen geeigneten Startwert können Sie mithilfe des Funktionsgraphen ermitteln.



Aufgabe 3

Erstellen Sie in Partnerarbeit eine ausführliche Lösung für die Beantwortung der Einstiegsfrage in Form eines kurzen Gutachtens.



Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- **Formulieren** Sie zunächst die Eingangsfrage.
- **Beschreiben** Sie kurz den Sachzusammenhang.
- **Nennen** Sie Ihr Ergebnis und **interpretieren** es im Sachzusammenhang.
- **Erläutern** Sie die Methodik (Ihre Vorgehensweise und der Rechenschritte), die Sie dabei angewandt haben.

Der Umfang sollte eine DIN-A4-Seite nicht überschreiten.

Aufgabe 4

Begründen Sie, warum eine näherungsweise Lösung zur Beantwortung der ursprünglichen Fragestellung ausreichend ist.

