

II.A.41

Analysis

Die Fläche zwischen zwei Graphen mithilfe von Integralrechnung bestimmen – Der Genfersee

Ein Beitrag von Aileen Burgermeister



Im Kernstück dieser Unterrichtseinheit erarbeitet sich Ihr Oberstufenkurs im Mathematikunterricht die Formel zur Berechnung einer Fläche zwischen zwei Graphen im Themengebiet der Integralrechnung selbst. Durch die Heranführung an das Thema mithilfe des Genfersees werden die Lernenden durch ein hohes Maß an Realitätsbezug sowie das eigenständige Lernen motiviert. Die Einheit bietet zudem vielfältige Differenzierungsmöglichkeiten, sowohl bei der Erarbeitungsphase als auch bei den anschließenden Übungen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	Sek II
Dauer:	8-10 Unterrichtsstunden (Minimalplan 3)
Inhalt:	Flächeninhalt; Integrale; Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1); Probleme mathematisch lösen (K2); mathematisch modellieren (K3)
Zusatzmaterialien:	PowerPoint-Präsentation

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Bi: Bildimpuls; Df: Differenzierungsmaterial

Einstieg

- | | | |
|------------|------|------------------------------|
| M 1 | (Bi) | Der Genfersee |
| M 2 | (Bi) | Der Genfersee mit Funktionen |



CD 86



Erarbeitung

- | | | |
|------------|---------|--|
| M 3 | (Ab) | Der Genfersee – Fläche zwischen zwei Graphen |
| M 4 | (Df) | Tipp- und Kontrollkarten zu M 3 |
| M 5 | (Ab/Df) | Vertiefungsaufgabe – Sachzusammenhang |

Ergebnissicherung

- | | | |
|------------|------|--|
| M 6 | (Ab) | Merkblatt – Die Fläche zwischen zwei Graphen |
|------------|------|--|

Übungen

- | | | |
|-------------|------|---|
| M 7 | (Ab) | Ein weiterer See |
| M 8 | (Ab) | Innermathematisch |
| M 9 | (Ab) | Sachaufgaben |
| M 10 | (Ab) | Problemlöseaufgabe: Die Fläche zwischen 3 Graphen |
| M 11 | (Ab) | Anleitung: Erstellen eines <i>Padlets</i> zur Themenübersicht |

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 17.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für drei-vier Stunden mit den folgenden Materialien:

- | | | |
|--------------|-------------------------------|--------------------------------|
| Stunde 1+2: | Erarbeitung der Formel | M 1 – M 6 |
| Stunde 3(4): | Eine weitere Übung, wahlweise | M 7 (oder M 8/M 9/M 10) |

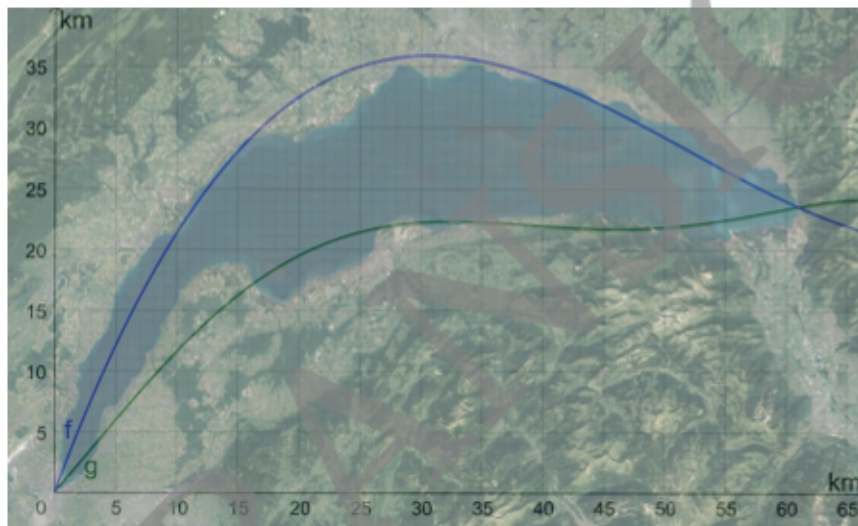
M 1

Der Genfersee



M 2

Der Genfersee mit Funktionen



© RAABE 2022

M 3

Der Genfersee – Fläche zwischen zwei Graphen

Die Fläche des Genfersees soll bestimmt werden. Die Begrenzung des Sees kann für ein bestimmtes Intervall annäherungsweise durch zwei Funktionen beschrieben werden:

$$f(x) = \frac{81}{200.000}x^3 - \frac{63}{1000}x^2 + \frac{2721}{1000}x + \frac{331}{5000}.$$

$$g(x) = -\frac{223}{1.000.000.000}x^5 + \frac{47}{1.250.000}x^4 - \frac{39}{20.000}x^3 + \frac{863}{50.000}x^2 + \frac{2853}{2500}x + \frac{331}{5000}$$

**Aufgabe**

Bestimmen Sie die Fläche des Genfersees.

Hinweis: Sie können die Aufgabe mit Ihrem bisherigen Wissen über die Integralrechnung lösen. Es stehen Ihnen aber auch Hilfekarten zur Verfügung, die Sie bei der Bearbeitung unterstützen können.

Tipp- und Kontrollkarten zu M 3

M 4

Tipp 1

Überlegen Sie, für welche Intervallgrenzen die Funktionen den See begrenzen und wie man diese ermitteln kann.



Tipp 2

Verdeutlichen Sie die Idee hinter der Berechnung der Fläche zwischen den beiden Graphen mithilfe einer Skizze.

Tipp 3

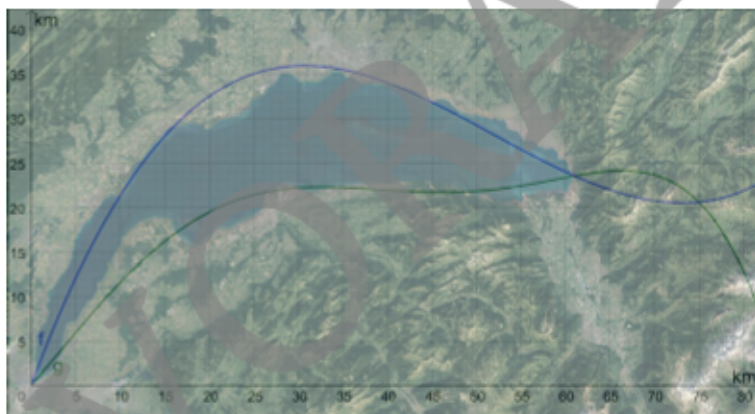
Schraffieren Sie jeweils das Integral (die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse) der beiden Funktionen unterschiedlich. Welche Fläche ist gesucht und wie können Sie diese mithilfe der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und der Integralrechnung berechnen?

Kontrolle

Die Intervallgrenzen sind die Schnittpunkte der beiden Funktionen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 61$. Für die Fläche erhält man $A = 581,935 \text{ km}^2$.

Vertiefungsaufgabe – Sachzusammenhang

M 5



Durch die Funktionen wird eine weitere Fläche eingeschlossen.

- Berechnen** Sie die Größe der zweiten Fläche.
- Begründen** Sie, ob die zweite eingeschlossene Fläche im Sachzusammenhang Sinn ergibt.
- Die Fläche des Genfersees beträgt laut Wikipedia $581,3 \text{ km}^2$ (Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Genfersee>). **Beurteilen** Sie, inwiefern die Modellierung durch zwei Funktionen diese Fläche abschätzen konnte. Nehmen Sie dabei auch Bezug darauf, dass die Funktionen das Ufer des Sees nicht exakt umranden.



Übung: Ein weiterer See

M 7

Auf den Bildern sehen Sie die Modellierung eines anderen Sees, bei dem die Lage des Koordinatensystems auf drei verschiedene Weisen gewählt wurde. Die Funktionsgleichungen aus der ersten Abbildung lauten

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2,7x^2 + \frac{14}{3}x + 5, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 - 8x + 5$$

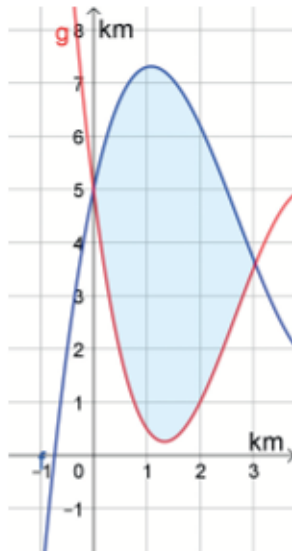


Abbildung 1



Abbildung 2

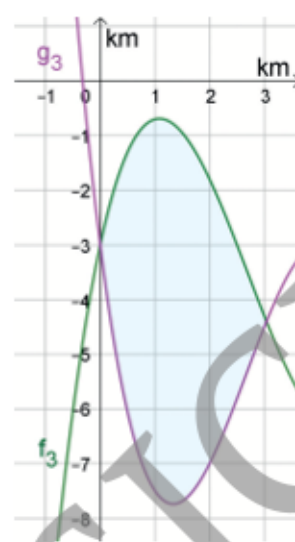


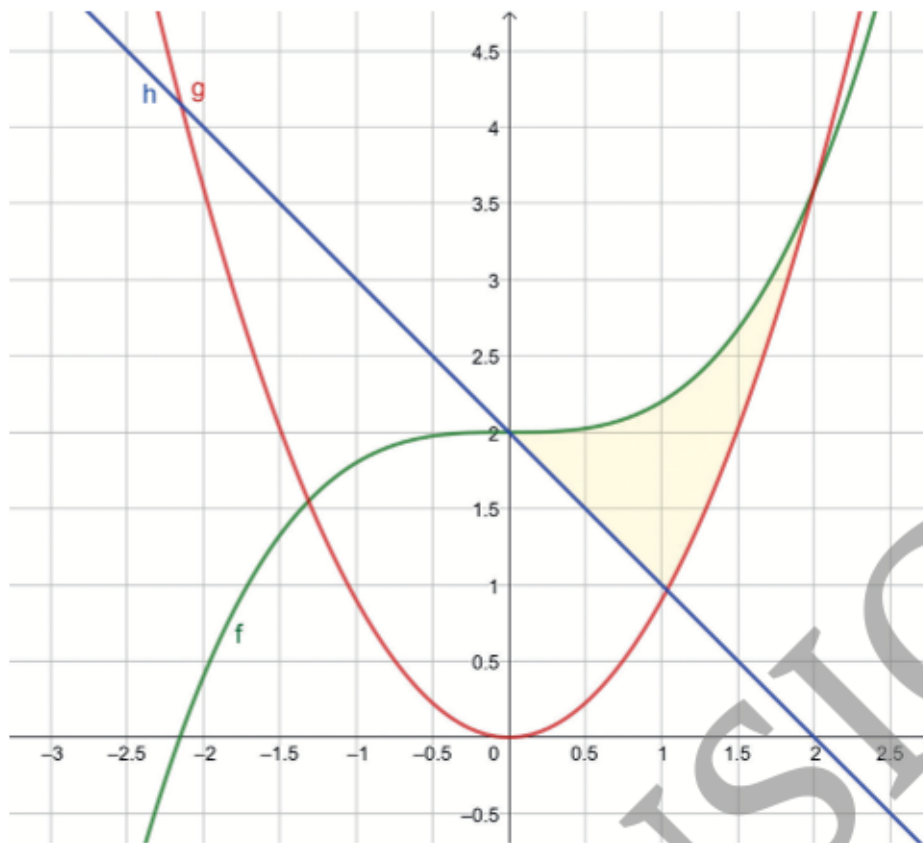
Abbildung 3

- Berechnen** Sie die Fläche des Sees.
- Geben** Sie die neuen Funktionsgleichungen f_2 , g_2 , f_3 und g_3 für die Funktionen aus Abbildung 2 und 3 an.
- Stellen** Sie eine Vermutung auf, ob Sie die Fläche des Sees bei den alternativen Funktionen ebenfalls berechnen können und auf dasselbe Ergebnis kommen.
- Prüfen** Sie Ihre Vermutung, indem Sie die Fläche des Sees bei der Wahl des Koordinatensystems aus Abbildung 2 und 3 ebenfalls mit der Formel $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$ oder $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$ berechnen.
- Begründen** Sie, ob eine Verschiebung entlang der y-Achse die Berechnung des Integrals beeinflusst.
- Bei Starkregen wird eine anliegende Wiese überflutet, sodass ein zweiter See entsteht. Dieser wird ebenfalls vollständig durch die zwei gegebenen Funktionen begrenzt. **Berechnen** Sie die Gesamtfläche beider Seen zusammen.



Übung: Probleme lösen – Die Fläche zwischen 3 Graphen

M 10



Aufgabe

Eine Fläche kann auch von mehr als zwei Graphen eingeschlossen sein. Die markierte Fläche soll exakt berechnet werden (gerundet auf zwei Nachkommastellen).

$$f(x) = 0,2x^3 + 2$$

$$g(x) = 0,9x^2$$

$$h(x) = -x + 2$$

- Ermitteln** Sie den markierten Flächeninhalt grob durch einen Überschlag.
- Stellen** Sie einen möglichen Lösungsweg zur Berechnung des Flächeninhalts **dar**.
- Berechnen** Sie den Flächeninhalt.
- Versuchen** Sie, einen weiteren Lösungsweg **aufzustellen**.
Stellen Sie ihre Lösungsvorschläge im Plenum (Alternativ: in einer Gruppe) **vor**.
- Vergleichen** Sie die Lösungswege und **beurteilen** Sie, welcher am geschicktesten ist.

