Analysis

Die Exponentialfunktion und die Temperatur von Getränken – Tee zu kalt, Cola zu warm?

Ein Beitrag von Prof. Dr. Andreas Pfeifer

Es gibt nichts Besseres als ein eisgekühltes Getränk im Sommer und den heißen Aufwärmtee im Winter. Doch was für eine Mathematik steckt eigentlich dahinter, wenn dieses Getränk immer mehr die Umgebungstemperatur annimmt? Dieser Frage können die Lernenden mithilfe dieses Beitrags ausführlich auf den Grund gehen. Anhand von Messdaten wird der Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur von Getränken untersucht. Dabei werden mithilfe konkreter Anwendung der Tee- und Cola-Temperatur verschiedene Funktionstypen wie Polynome, Hyperbel, Exponentialfunktionen untersucht. Rechenregeln für Bruch-, Potenz- und Exponentialrechnung und auch Lösungsmethoden von Gleichungen werden umfangreich eingeübt.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11
Dauer:	4 Unterrichtsstunden (Minimalplan 2 Unterrichtsstunden)
Inhalt:	Funktionsbegriff, verschiedene Funktionstypen vergleichen, Exponentialfunktion, Rechenregeln, Termumformungen
Kompetenzen:	mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)
Zusatzmaterialien:	*Excel*-Datei

Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt
Planung für 4 Stunden: **M 1** und **M 2** insgesamt 2 Stunden, **M 3** und **M 4** jeweils eine Stunde

Einstieg

Thema: **Problemorientierter Unterrichtseinstieg**
M 1 (Ab) Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur

Erarbeitung

Thema: **Berechnen und Interpretieren**

M 2 (Ab) Analyse dreier Temperaturfunktionen

Benötigt: ☐ Taschenrechner

M 3 (Ab) Eigenschaften der Temperaturfunktion und ihrer Umkehrfunktion

Übung bzw. Hausaufgabe

Thema: **Anwendung auf ein Kaltgetränk**

M 4 (Ab) Temperaturverlauf eines Kaltgetränks

Benötigt: ☐ Taschenrechner

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 11.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für zwei Stunden mit den folgenden Materialien:
M 1 (Ab) Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur
M 2 (Ab) Analyse dreier Temperaturfunktionen. (Aus Zeitgründen kann auch nur eine Funktion verwendet werden.)

M 1 Einstieg: Zusammenhang zwischen Zeit und Temperatur

Svenja bekommt eine Tasse ziemlich heißen Tee. Da er ihr zum Trinken zu heiß ist, wartet sie ab und misst erst mal die Temperatur nach einer Minute und nach sechs Minuten. Die gemessenen Werte sind in der folgenden Tabelle angegeben: Bekannt ist außerdem die Raumtemperatur (Umgebungstemperatur) von 21 °C.

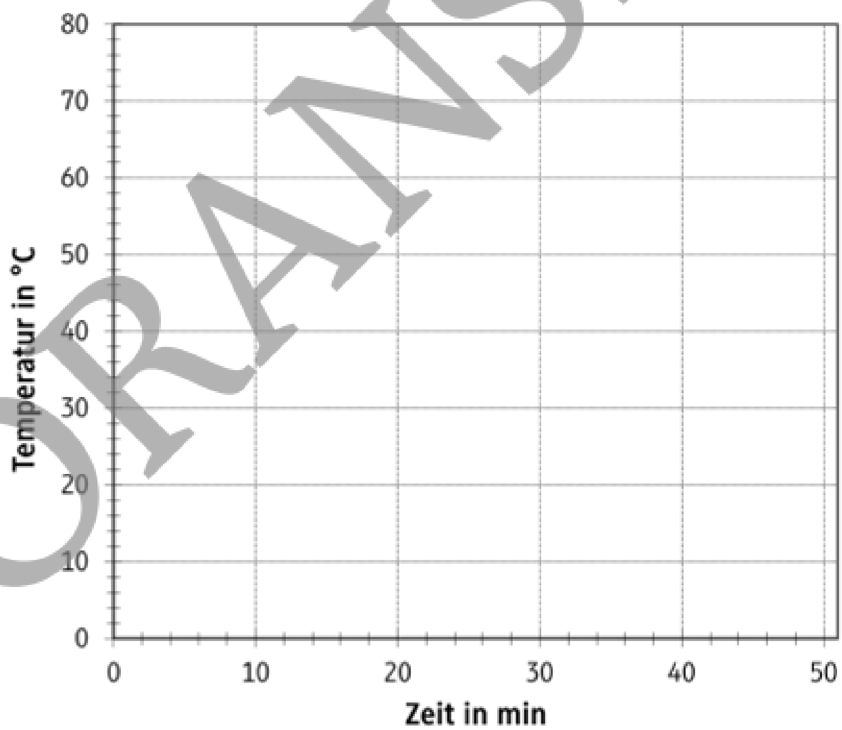
Messwert k	1	2
Zeit in Minuten t_k	1	6
Temperatur T_k in Grad Celsius (°C)	72	55

Aufgabe

Svenja will den Tee nicht zu heiß, aber auch nicht zu kalt trinken. Deshalb soll die Temperatur des Tees eine bestimmte Temperatur haben. Sie will wissen, wann diese Temperatur erreicht ist. Können Sie ihr helfen?

Gesucht ist eine Funktionsvorschrift T(t), mit der bei gegebener Zeit t die Temperatur T(t) ermittelt werden kann.

a) **Tragen** Sie dazu die beiden Messpunkte in das nachfolgende Koordinatensystem **ein**.



b) Überlegen Sie, welche Eigenschaften die Temperaturfunktion noch hat, außer dass sie durch die beiden Messpunkt gehen sollte. **Geben** Sie mindestens zwei Eigenschaften **an**.

c) **Untersuchen** Sie die folgenden Funktionstypen, ob sie für den Temperaturverlauf in Frage kommen. Dabei sind a, b bzw. c reelle Zahlen. Es gibt natürlich noch die Möglichkeit der Kombination der einzelnen Funktionstypen. Diese aufwändigeren Funktionen sollen aber nicht betrachtet werden.

Funktionstyp	**Funktionstyp sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.**
Konstante Funktion $T(t) = a$	
Gerade $T(t) = m\,t + b$	
Parabel $T(t) = a\,t^2 + b^t + c$	
Hyperbel **Ausdrücke mit z. B.** $T(t) = \frac{1}{t}$ $T(t) = \frac{1}{t^2}$ $T(t) = \frac{a}{t+b} + c$ $T(t) = \frac{1}{at+b} + c$	
Exponentialfunktion $T(t) = a \cdot b^t$ $T(t) = a \cdot b^t + c$	
Trigonometrische Funktion Ausdrücke mit sin(t), cos(t)	
Logarithmusfunktion $T(t) = \ln(t)$ $T(t) = a \ln(bt) + c$	
Wurzelfunktion $T(t) = a \cdot \sqrt{t}$	

d) Für welche(n) Funktionstyp(en) entscheiden Sie sich? Warum? **Erläutern** Sie.

M 2 Erarbeitung: Analyse dreier Temperaturfunktionen

Sie bekommen eine Tasse ziemlich heißen Tee. Da er zu heiß zum Trinken ist, messen Sie zunächst die Temperatur. Die gemessenen Werte sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Messwert k	1	2
Zeit in Minuten t_k	1	6
Temperatur T_k in Grad Celsius (°C)	72	55

Bekannt ist außerdem die Raumtemperatur (Umgebungstemperatur) von 21 °C.
Es bieten sich die folgenden Funktionstypen für den Temperaturverlauf an:

$T_{hyp1}(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + c$, $T_{hyp2}(t) = \frac{1}{at+b} + c$ und $T_{exp}(t) = a \cdot b^t + c$.

Aufgabe

a) **Ermitteln** Sie für jede Funktion eine Vorhersage für die Temperatur nach 15 Minuten.

b) **Zeichnen** Sie den Temperaturverlauf bei den drei Funktionen in das Koordinatensystem **ein**.

c) Welche der Funktionstypen ist die bessere bzw. geeignetere? **Beurteilen** Sie.

Tipp

Berechnen Sie zuerst für die jeweiligen Funktionen die Koeffizienten a und b, sodass die jeweilige Funktion die angegebenen Datenwerte erfüllt. Tragen Sie die gefundenen Funktionen ein:

$T_{hyp1}(t)$ = ____________ $T_{hyp2}(t)$ = ____________ $T_{exp}(t)$ = ____________

Wertetabelle

Zeit t	1									
T_{hyp1}	72,0									
T_{hyp2}	72,0									
T_{exp}	72,0