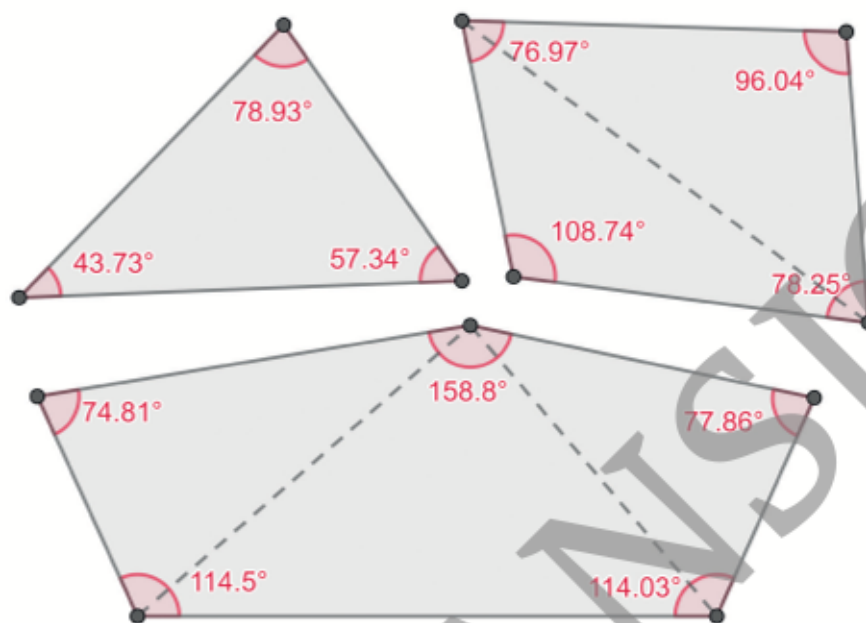


I.D.66

Geometrie

Entdecken der Winkelsätze und des Winkelsummensatzes für Dreiecke und Vielecke

Nach einer Idee von Ann-Cathrin und Birgit Bremer



Thematisch beschäftigt sich diese Einheit mit der Erschließung von Winkelweiten unter Verwendung von Scheitel- und Nebenwinkeln sowie Stufen- und Wechselwinkeln. Die Lernenden begründen damit den Winkelsummensatz für Dreiecke und Vielecke. Argumentieren wird dadurch im Speziellen als Kompetenz gefördert. Individuelles Lernen wird durch einen Eingangstest, verschiedene Niveaustufen, Erklärvideos, *LearningApps* und Tipp-Karten ermöglicht. Zusatzdateien zur dynamischen Geometriesoftware *GeoGebra* unterstützen das selbstständige Erkunden, Veranschaulichen und Durchdringen des Problems.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	7/8
Dauer:	8 Unterrichtsstunden (Minimalplan 5)
Inhalt:	Winkelsätze, Winkelsummensatz
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), kommunizieren (K6)
Medien:	<i>GeoGebra</i> , <i>LearningApps</i>

GeoGebra

Auf einen Blick

Ab = Arbeitsblatt; Lek = Lernerfolgskontrolle Mb = Merkblatt; Tk = Tippkarten
Planung für 8 Stunden



Lernstandsdiagnose

Thema: **Winkelarten und parallele Geraden**

M 1 (Ab) Winkelarten und parallele Geraden – Bin ich fit?

M 2 (Ab) Winkelarten und parallele Geraden – Bin ich fit?

Einstieg

Thema: **Winkelsummensatz**

M 3 (Ab) Dreiecke und deren Innenwinkelsumme

Erarbeitung

Thema: **Winkelsätze**

M 4 (Ab) Winkelsätze entdecken

Ergebnissicherung I

Thema: **Winkelsätze**

M 5 (Mb) Merkblatt – Winkelsätze

Erarbeitung II

Thema: **Winkelsumme im Dreieck**

M 6 (Ab) Innenwinkelsumme im Dreieck beweisen

M 7 (Tk) Tippkarten zu „Innenwinkelsumme im Dreieck beweisen“

Ergebnissicherung II

Thema: **Winkelsumme im Dreieck**

M 8 (Mb) Merkblatt – Winkelsumme im Dreieck

Vertiefung

Thema: **Winkelsumme im n-Eck**

M 9 (Ab) Innenwinkelsumme in Vielecken erschließen



Übung

Thema: **Winkelsätze und Winkelsumme**

M 10 (Ab) Winkelsätze anwenden

M 11 (Ab) Winkelsätze anwenden

M 12 (Ab) Winkelsummensatz anwenden

M 13 (Ab) Winkelsummensatz anwenden

M 14 (Lek) Bin ich fit? – Teste dich!



Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 21.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für fünf Stunden mit den folgenden Materialien:

Thema: **Winkelsätze und Winkelsumme**

M 3 (Ab) Dreiecke und deren Innenwinkelsumme

M 4 (Ab) Winkelsätze entdecken

M 5 (Mb) Merkblatt – Winkelsätze

M 6 (Ab) Innenwinkelsumme im Dreieck beweisen

M 7 (Tk) Tippkarten zu „Innenwinkelsumme im Dreieck beweisen“

M 8 (Mb) Merkblatt – Winkelsumme im Dreieck

M 14 (Lek) Bin ich fit? – Teste dich!

Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau



Zusatzaufgaben



Alternative



Selbsteinschätzung

M 1



<https://raabe.click/>

Winkel-messen

Winkelarten und parallele Geraden – Bin ich fit?

Aufgabe 1

Schneide die Kärtchen aus.

Ordne die richtige Winkelart, Winkelgröße und die passende Abbildung einander zu.

Überprüfe deine Lösung.

Klebe die Kärtchen richtig geordnet in dein Heft oder auf ein Extrablatt.

Nullwinkel	$\alpha = 180^\circ$	
überstumpfer Winkel	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	
rechter Winkel	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	
spitzer Winkel	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$	
gestreckter Winkel	$\alpha = 0^\circ$	
stumpfer Winkel	$\alpha = 90^\circ$	
Vollwinkel	$\alpha = 360^\circ$	

© RAABE 2023

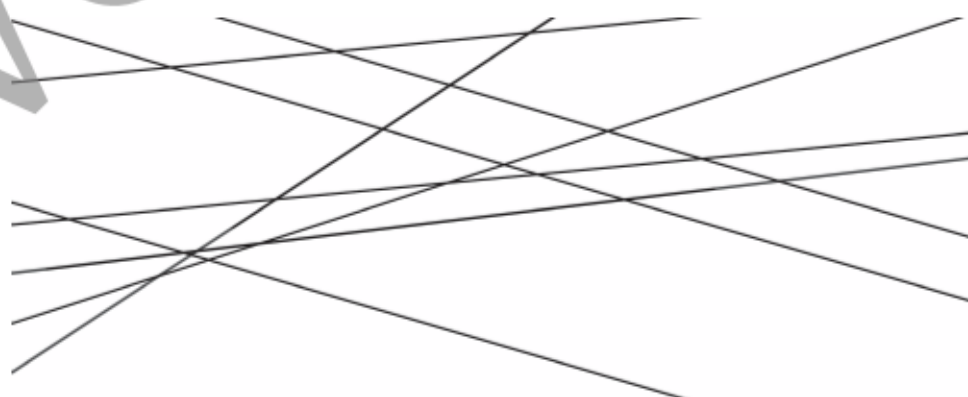


<https://raabe.click/>

parallele-Geraden

Aufgabe 2

Markiere zueinander parallele Geraden mit derselben Farbe.

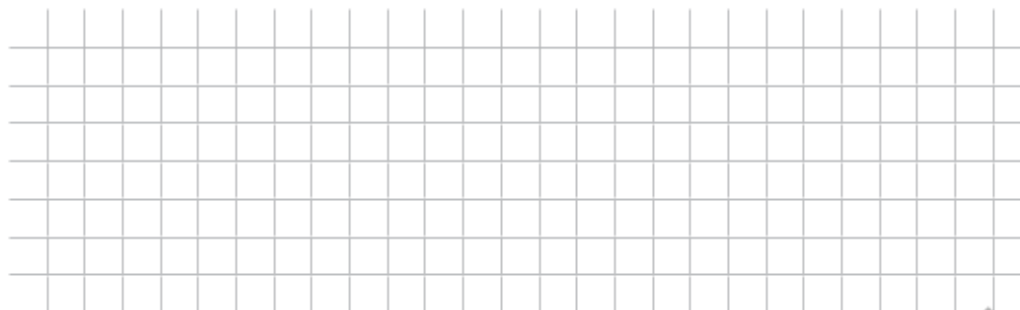


Winkelsätze entdecken

M 4

Aufgabe 1

- a) **Zeichne** eine beliebige Gerade mit einer Länge von mindestens 4 cm.
 b) **Zeichne** eine weitere beliebige Gerade mit einer Länge von mindestens 4 cm, die die erste Gerade schneidet.



- c) **Beschrifte** die dabei entstandenen Winkel und notiere deren Größen.

$\alpha =$	$\beta =$
$\gamma =$	$\delta =$

- d) **Vervollständige** die beiden Sätze mithilfe deiner Zeichnung (Teilaufgabe a + b) und deiner ermittelten Winkelgrößen (Teilaufgabe c).

Zwei nebeneinanderliegende Winkel ergänzen sich zu $\underline{\hspace{2cm}}$ °.
 Man nennt sie **Nebenwinkel**.
 Zwei sich gegenüberliegende Winkel sind immer $\underline{\hspace{2cm}}$ groß.
 Man nennt sie **Scheitelwinkel**.

Aufgabe 2

Neben- und Scheitelwinkel entstehen, wenn sich zwei beliebige Geraden schneiden. Es entstehen auch dann besondere Beziehungen zwischen Winkeln, wenn eine beliebige Gerade zwei parallele Geraden schneidet. Diese nennt man **Stufen- und Wechselwinkel**. Mit den folgenden Aufgaben wirst du herausfinden, was genau mit diesen beiden Begriffen gemeint ist.

Öffne die GeoGebra-Datei <https://raabe.click/ggb-ID66-M4A2> und bearbeite die Teilaufgaben.

- a) **Notiere** alle Winkel, die gleich groß sind.

- b) **Bewege** die Gerade f in der GeoGebra-Datei und **beobachte**, wie sich die Winkelgrößen verändern. **Notiere**, was dir auffällt.



Ergebnissicherung: Merkblatt – Winkelsätze

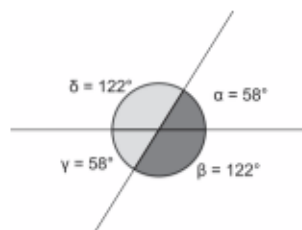
M 5



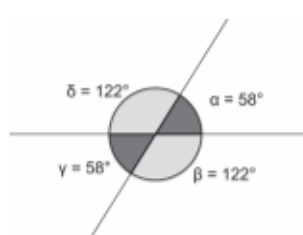
Nebenwinkel

An zwei sich schneidenden Geraden entstehen insgesamt vier Winkel. Zwei **nebeneinanderliegende Winkel** ergänzen sich zu **180°** . Man nennt sie **Nebenwinkel**.

Beispiel: α ist ein Nebenwinkel von β und δ .
 γ und β bilden ein Nebenwinkelpaar.



Scheitelwinkel



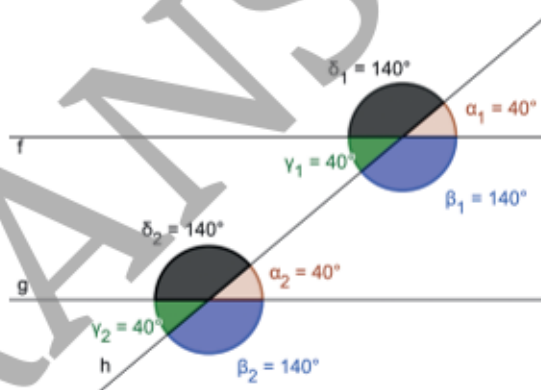
An zwei sich schneidenden Geraden entstehen insgesamt vier Winkel. Zwei **gegenüberliegende Winkel** sind immer **gleich groß**. Man nennt sie **Scheitelwinkel**.

Beispiel: α und γ sind Scheitelwinkel.
 δ und β bilden ein Scheitelwinkelpaar.

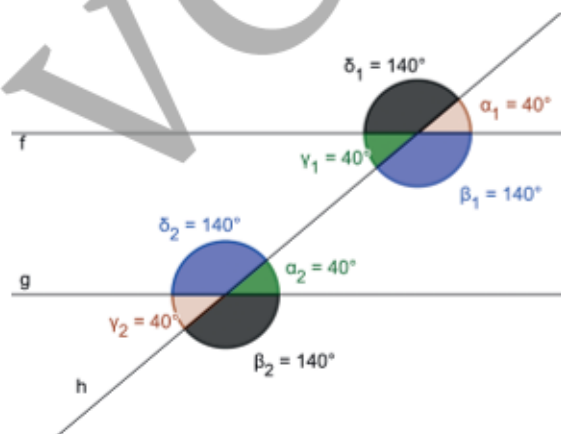
Stufenwinkel

Wenn eine beliebige Gerade zwei **parallele Geraden** schneidet, entstehen insgesamt 8 Winkel. Winkel, die dieselbe Lage in Bezug auf die Geraden haben, werden als **Stufenwinkel** bezeichnet. Stufenwinkel sind immer **gleich groß**.

Beispiel:
 α_1 und α_2 sind Stufenwinkel.



Wechselwinkel



Wechselwinkel sind eine Kombination aus Stufen- und Scheitelwinkel. Um einen Wechselwinkel zu finden, schaut du also zunächst, wo der entsprechende Stufenwinkel ist. Der Scheitelwinkel von diesem Stufenwinkel ist der Wechselwinkel. **Wechselwinkel** sind immer **gleich groß**.

Beispiel:
 α_1 und γ_2 sind Wechselwinkel.



<https://raabe.click/Scheitelwinkel-Nebenwinkel>



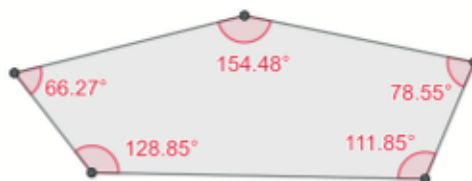
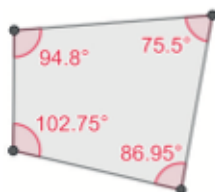
<https://raabe.click/Stufenwinkel-Wechselwinkel>

Vertiefung: Innenwinkelsumme in Vielecken erschließen

M 9



Aufgabe 1



- a) **Notiere** die Winkel des Vierecks in der Tabelle und **berechne** die Winkelsumme im Viereck. **Notiere** diese ebenfalls in der Tabelle.
- b) **Öffne** die GeoGebra-Datei <https://raabe.click/ggb-ID66-M9A1>. **Ziehe** an den Eckpunkten und lasse dadurch neue Vierecke bzw. Fünfecke entstehen. **Notiere** die Winkel und die Winkelsumme von zwei, so neu entstehender Vierecke bzw. Fünfecke in der Tabelle.



Innenwinkelsumme im Viereck				
1. Winkel	2. Winkel	3. Winkel	4. Winkel	Innenwinkelsumme

Innenwinkelsumme im Fünfeck					
1. Winkel	2. Winkel	3. Winkel	4. Winkel	5. Winkel	Innenwinkelsumme

- c) Was fällt dir bei den Innenwinkelsummen auf? **Notiere** deine Beobachtung und **formuliere** einen allgemein gültigen Satz für die Innenwinkelsumme für Vierecke und Fünfecke.
- d) **Begründe**, mithilfe des Winkelsummensatzes für Dreiecke den in Aufgabenteil c) aufgestellten Satz für die Innenwinkelsumme für Vierecke und Fünfecke.
- e) **Finde** eine allgemeine Formel, mit der man die Innenwinkelsumme eines n-Ecks berechnen kann.

Gestaffelte Tipps zur Begründung

Zeichne dir geeignete Hilfslinien in das Viereck bzw. Fünfeck ein.



Schau dir das Video an: <https://raabe.click/winkelsumme>



Aufgabe 2

Miro behauptet: „Es gibt kein n-Eck, bei dem die Winkelsumme genau 960° beträgt. Es gibt aber ein n-Eck bei dem die Winkelsumme genau 1260° beträgt!“ Hat er Recht? **Begründe**.

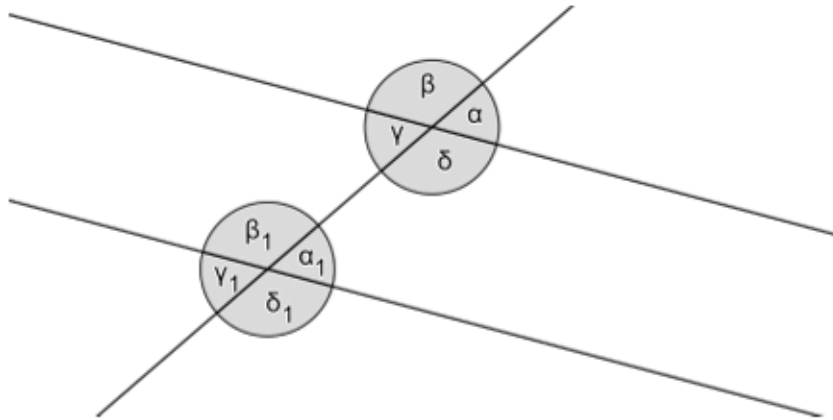
Übung: Winkelsätze anwenden

M 11



Aufgabe 1

a) **Berechne** die fehlenden Winkel in der Tabelle mithilfe der Abbildung.

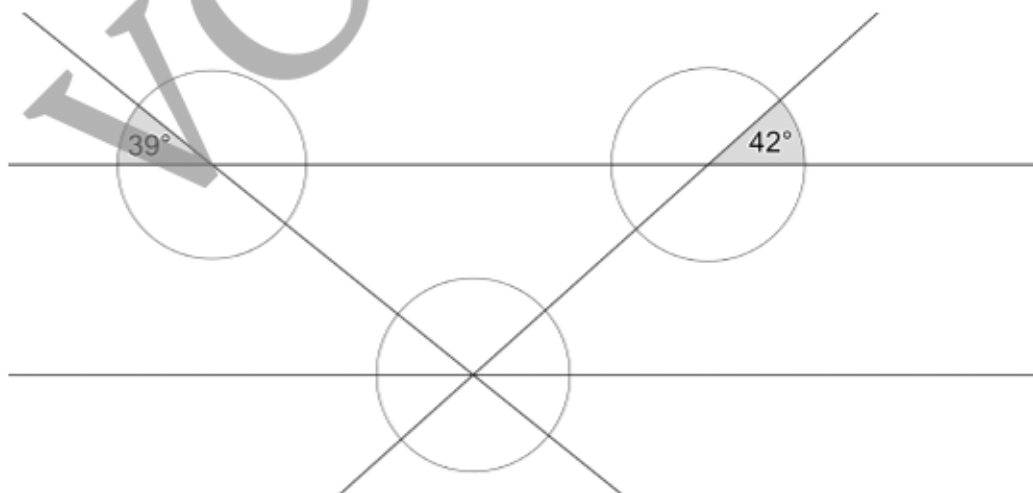


α	β	γ	δ	α_1	β_1	γ_1	δ_1
35°							

b) **Erkläre**, warum nur ein gegebener Winkel benötigt wird, um alle anderen Winkel zu berechnen.

Aufgabe 2

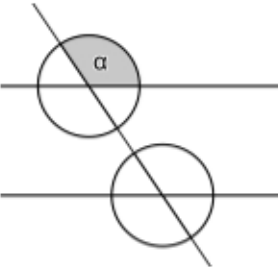
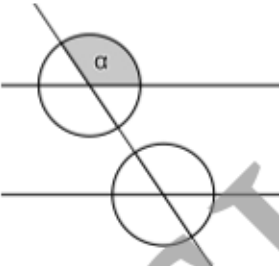
Vervollständige die Abbildung, indem du die fehlenden Winkelgrößen ergänzt.



M 14

Bin ich fit? – Teste dich!

In der folgenden Tabelle findest du Aufgaben, mit denen du herausfinden kannst, ob du das Thema verstanden hast. Du kannst zwischen drei Niveaustufen wählen.

		
1. Kennzeichne ...  a) die Nebenwinkel von α mit Pünktchen b) den Scheitelwinkel von α mit Linien c) den Stufenwinkel von α mit einer hellen Farbe d) den Wechselwinkel von α mit einer dunklen Farbe	1. Trage die Größe aller Winkel in die Zeichnung ein. α beträgt 124°. 	1. Vervollständige die Lücken. Werden zwei parallele Geraden von einer weiteren Gerade geschnitten, dann existieren immer _____ Nebenwinkelpaare. Insgesamt entstehen _____ Winkel, wovon jeweils _____ gleich groß sind. Neben den Scheitelwinkeln sind auch _____ Winkel und _____ Winkel gleich groß.
2. Gegeben ist ein Dreieck. Zwei Winkel sind bekannt. Berechne den fehlenden Winkel. a) $\alpha = 12^\circ$; $\beta = 111^\circ$ b) $\beta = 20^\circ$; $\gamma = 77^\circ$ c) $\alpha = 47,6^\circ$; $\gamma = 105,4^\circ$	2. Gegeben ist ein Dreieck. Zwei Winkel sind bekannt. Berechne den fehlenden Winkel. a) $\alpha = 12,11^\circ$; $\beta = 10,44^\circ$ b) $\beta = 21^\circ$; $\gamma = \beta$ c) $\alpha = \beta = \gamma$	2. Begründe, ob folgendes Dreieck existieren kann (extra Blatt). a) Die Winkelgröße von α und β ist eine natürliche gerade Zahl (z. B. 22°). Der dritte Winkel ist somit auch eine natürliche gerade Zahl. b) α beträgt 5°. Die beiden anderen Winkel sind stumpf. c) α beträgt 5°. Ein weiterer Winkel ist $84,5^\circ$ groß. Der letzte Winkel ist stumpf.