II.B.27

## Lineare Algebra und analytische Geometrie

# Koordinatengeometrie im Raum – Wie bekommt man Kugeln optimal verpackt?

Günther Weber

© artas/iStock/Getty Images Plus





Wie verpackt man ein Produkt am besten, sodass es möglichst viel Platz in der Verpackung einnimmt und keine Mogelpackung darstellt? Noch dazu, wenn das Produkt eine so anspruchsvolle geometrische Form einer Kugel aufweist? Mit den Methoden der analytischen Geometrie untersuchen die Lernenden die Verpackung von kugelförmigen Produkten und führen viele Berechnungen auf einen Tetraeder zurück. Nach dem Aufstellen von Geraden- und Ebenengleichungen sowie der Schnittpunktbestimmung der geometrischen Objekte wird der prozentuale Anteil des Produkts an der Verpackung bestimmt.

**KOMPETENZPROFIL**

LearningApps - interaktive Lernbausteine

| | |
|---|---|
| **Klassenstufe:** | Sek. II |
| **Dauer:** | 3–4 Unterrichtsstunden |
| **Inhalt:** | Koordinatengeometrie im Raum; Schnittpunktbestimmung; Geradengleichung; Ebenengleichung |
| **Kompetenzen:** | Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5) |

# Auf einen Blick

Ab: Arbeitsblatt; Tk: Tippkarte
Planung für 3–4 Stunden

## Erarbeitung

| | |
|---|---|
| **Thema:** | **Verpackung kugelförmiger Gegenstände** |
| **M 1 (Ab)** | Verpackung gleich großer Kugeln |
| **M 2 (Ab)** | Verpackung von Kugeln unterschiedlicher Größe |
| **M 3 (Tk)** | Tippkarte: Tetraeder |
| **M 4 (Ab)** | Kugeln in einer pyramidenförmigen Verpackung |
| **Benötigt:** | ☐ GTR oder CAS<br>☐ Geogebra<br>☐ Tabellenkalkulation, z. B. Microsoft Excel |

## Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 10.

## Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für drei Stunden mit den folgenden Materialien:

| | |
|---|---|
| **M 1 (Ab)** | Verpackung gleich großer Kugeln |
| **M 2 (Ab)** | Verpackung von Kugeln unterschiedlicher Größe |

Oder planen Sie die Unterrichtseinheit für vier Stunden mit den folgenden Materialien:

| | |
|---|---|
| **M 1 (Ab)** | Verpackung gleich großer Kugeln |
| **M 3 (Tk)** | Tippkarte: Tetraeder |
| **M 4 (Ab)** | Kugeln in einer pyramidenförmigen Verpackung |

## Erklärung zu den Symbolen

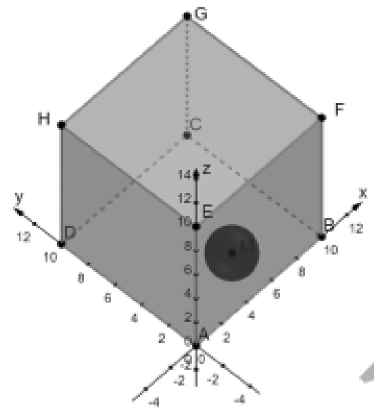
Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

| | | |
|---|---|---|
| einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau |
| Zusatzaufgaben | Alternative | Internetrecherche |

# Verpackung gleich großer Kugeln **M 1**

**Aufgabe 1**

Ein Würfel liegt im 1. Oktanten eines Koordinatensystems; eine Raumdiagonale verläuft vom Punkt $A(0|0|0)$ bis zum Punkt $G(10|10|10)$ (siehe Abbildung).
**Bestimmen** Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Würfels.




**Aufgabe 2**

In dem Würfel liegt eine Kugel mit dem Radius 1,5 LE. Diese Kugel liegt auf der Grundfläche ABCD des Würfels.
Die Kugel wird auf der Grundfläche hin und her bewegt.

a) **Bestimmen** Sie die Größe der Fläche, auf der sich die Kugel auf der Grundfläche bewegen kann, sowie die Länge der Linie, auf der die Berührpunkte der Kugel mit den Seitenflächen des Würfels liegen.

b) Der Radius r und somit auch die Größe der Kugel seien jetzt variabel, da in die Kugel Luft geblasen oder herausgelassen werden kann. **Bestimmen** Sie abhängig vom Kugelradius r die Größe der Fläche, auf der sich die Kugel auf der Grundfläche bewegen kann. Ermitteln Sie für diesen Fall außerdem die Länge der „Berührungslinie“ mit den Seitenflächen.

**Aufgabe 3**

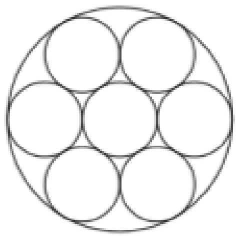
Es sollen 20 Kugeln mit dem Radius $r = 3\,\text{cm}$ verpackt werden. Als Behälter für die Verpackungen steht ein Quader mit einer quadratischen Grundfläche zur Verfügung

a) **Bestimmen** Sie den prozentualen Anteil des Volumens der Kugeln bez. des Volumens des Verpackungsbehälters, wenn die Verpackungsmaße minimal gewählt werden.

b) **Begründen** Sie, dass der prozentuale Anteil bei der Verpackung aus Aufgabenteil 3a) gleich ist.

**Aufgabe 4**

Es sollen 7 Kugeln mit dem Radius $r = 3\,\text{cm}$ in einen Zylinder gelegt werden, wobei die Kugeln in der Grundfläche liegend verpackt werden (siehe Abbildung).
**Bestimmen** Sie den prozentualen Anteil des Volumens der Kugeln bez. des Volumens der Verpackung, wenn die Verpackungsmaße minimal gewählt werden.



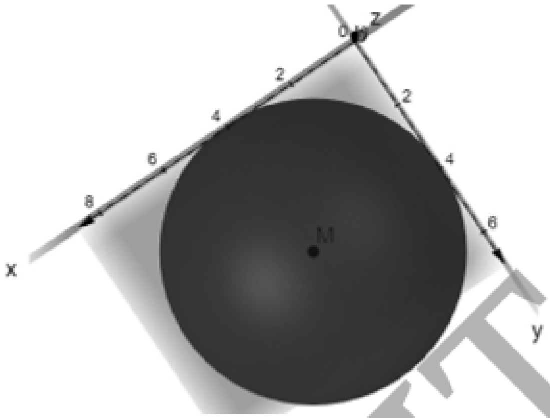
**Überprüfen** Sie Ihre Ergebnisse mithilfe der *LearningApp* „Verpackung kugelförmiger Gegenstände (I)“ https://learningapps.org/watch?v=ptjvjkvv323

# M 2 Verpackung von Kugeln unterschiedlicher Größe

**Aufgabe 1**

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Kugel, die auf der xy-Koordinatenebene liegt sowie die xz- und yz-Koordinatenebene berührt.

**Bestimmen** Sie den Mittelpunkt der Kugel, wenn der Radius r beträgt. Geben Sie eine Ortslinie für die Mittelpunkte abhängig vom Radius r an.



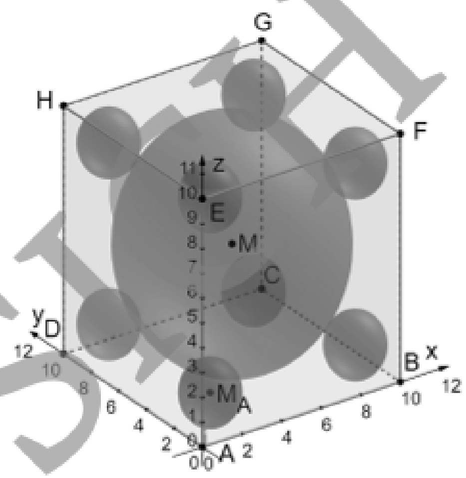

**Aufgabe 2**

In einer würfelförmigen Verpackung mit der Kantenlänge 10 cm liegt eine Kugel mit dem Radius 5 cm. (Die Kugel liegt im 1. Oktanten; siehe nebenstehende Abbildung).

Der Hohlraum zwischen der Kugel und der Verpackung soll an den Eckpunkten der Verpackung durch 8 kleinere Kugeln aufgefüllt werden.

a) **Bestimmen** Sie die Mittelpunkte und den größtmöglichen Radius der kleineren Kugeln.

b) **Berechnen** Sie, wie viel Prozent des Volumens des Würfels die 9 Kugeln einnehmen.




**Aufgabe 3**

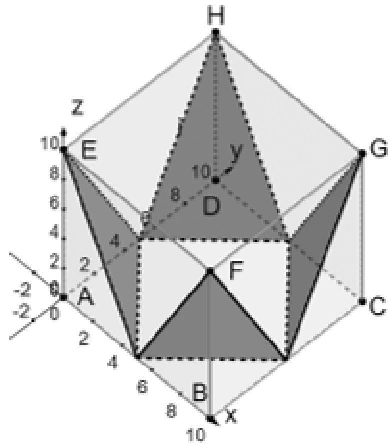
Es wird weiterhin ein Würfel der Kantenlänge 10 cm betrachtet. Um ein Eindrücken der würfelförmigen Verpackung zu erschweren, werden im Inneren des Würfels von den Kantenmitten der Grundfläche zu den Eckpunkten der Deckfläche Versteifungen in Form von gleichschenkligen Dreiecken angebracht (siehe nebenstehende Abbildung).

a) **Zeigen** Sie, dass auch in diesem „eingeschränkten" Würfel noch eine Kugel mit einem Radius von 5 cm untergebracht werden kann.

b) **Bestimmen** Sie die Berührpunkte des „eingeschränkten" Würfels mit der Kugel.

c) **Bestimmen** Sie, wie viel Prozent des Volumens des „eingeschränkten" Würfels von der Kugel eingenommen werden.

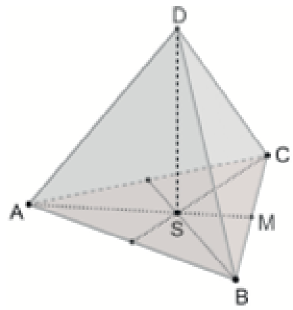
d) Der Hersteller der abgeänderten Verpackung behauptet, dass der Würfel an den unteren Eckpunkten 2,5 cm eingedrückt werden kann, ohne dass die Kugel beschädigt wird. **Überprüfen** Sie diese Behauptung rechnerisch.




**Überprüfen** Sie Ihre Ergebnisse mithilfe der *LearningApp* „Verpackung kugelförmiger Gegenstände (II)" https://learningapps.org/display?v=prh9xcdn523

# Tippkarte: Tetraeder

**M 3**




Die Oberfläche des Tetraeders besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken. Ist das Dreieck ABC die gleichseitige Grundfläche des Tetraeders, so trifft das Lot von der Spitze im Punkt D die Grundfläche im Schwerpunkt S der Grundfläche. Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1.
Im gleichseitigen Dreieck fallen die Höhen, die Seitenhalbierenden, die Mittelsenkrechten und die Winkelhalbierenden zusammen.

| Berechnung von Höhe und Flächeninhalt im gleichseitigen Dreieck | |
|---|---|
| Das Grundflächendreieck ABC wird durch die Seitenhalbierende/Höhe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke geteilt. Ist a die Kantenlänge des Tetraeders, so erhält man mit dem Satz des Pythagoras, angewendet auf das Teildreieck ABM<br>$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$<br>$h^2 = \frac{3}{4}a^2$<br>$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ | Der Flächeninhalt eines Dreiecks mit der Grundseite g und der Höhe h berechnet sich nach der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$.<br>Für das gleichseitige Dreieck erhält man somit<br>$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ |

**Berechnung der Höhe im Tetraeder**

Der Schwerpunkt S teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1; somit ist

$$\left|\overline{AS}\right| = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{3}\sqrt{3}$$

Wendet man den Satz des Pythagoras auf das Dreieck ASD an, so gilt:

$$\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 + H^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow H^2 = \frac{2}{3}a^2$$

$$\Rightarrow H = a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6}$$

Das Volumen einer Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe h berechnet sich nach der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$. Das Tetraeder hat somit ein Volumen von

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \sqrt{6} = \frac{a^3}{36} \cdot \sqrt{18} = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{2}$$

Hat das Tetraeder die Eckpunkte $A(x_A \mid y_A \mid z_A)$, $B(x_B \mid y_B \mid z_B)$, $C(x_C \mid y_C \mid z_C)$ und $D(x_D \mid y_D \mid z_D)$, so hat der Schwerpunkt S des Tetraeders die Koordinaten

$$S\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \,\middle|\, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \,\middle|\, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$