

IV.A.83

Einzelstunden

Kombinatorik und Graphentheorie kreativ üben – Die Laplace-Maus im Gitterlabyrinth

Redaktion Mathematik



Machen Sie den Lernenden Lust auf Mathematik mit motivierenden und problemorientierten Aufgaben. Anhand des anschaulichen Beispiels einer Maus im Gitterlabyrinth fordern Sie die Lernenden heraus, ihr Vorwissen zu aktivieren und geeignete mathematische Modelle zu finden und kennenzulernen. Setzen Sie das Material zur Übung der Kombinatorik ein oder um einen ersten Einblick in die Graphentheorie zu geben. Sie können die *PowerPoint*-Präsentation nutzen, um im Plenum die Aufgaben zu besprechen und durch Ihren Unterricht zu leiten.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	8–11
Dauer:	1–2 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematisch argumentieren (K1), mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)
Inhalt:	Laplace-Experiment; Kombinatorik; Binomialkoeffizient; Graphentheorie; Wegzählverfahren
Zusatzmaterial:	<i>PowerPoint</i> -Präsentation



Auf einen Blick

Einstieg

Thema: Vorwissen aktivieren und Motivation schaffen

M 1 Die Maus im Gitterlabyrinth



Erarbeitung

Thema: Graphentheorie und Wegzählverfahren kennenlernen

M 2 Minimalwege im Koordinatengitter – Graphentheorie

Übung

Thema: Überprüfung des Verständnisses und Einübung des Modells

M 3 Die Maus im Gitterlabyrinth – Minimalwege über einen Knoten und Knoten als Störstelle

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 11.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit mit den folgenden Materialien:

M 1 Die Maus im Gitterlabyrinth

M 2 Minimalwege im Koordinatengitter – Graphentheorie

M 3 Die Maus im Gitterlabyrinth – Minimalwege über einen Knoten und Knoten als Störstelle **Aufgabe 1–2**

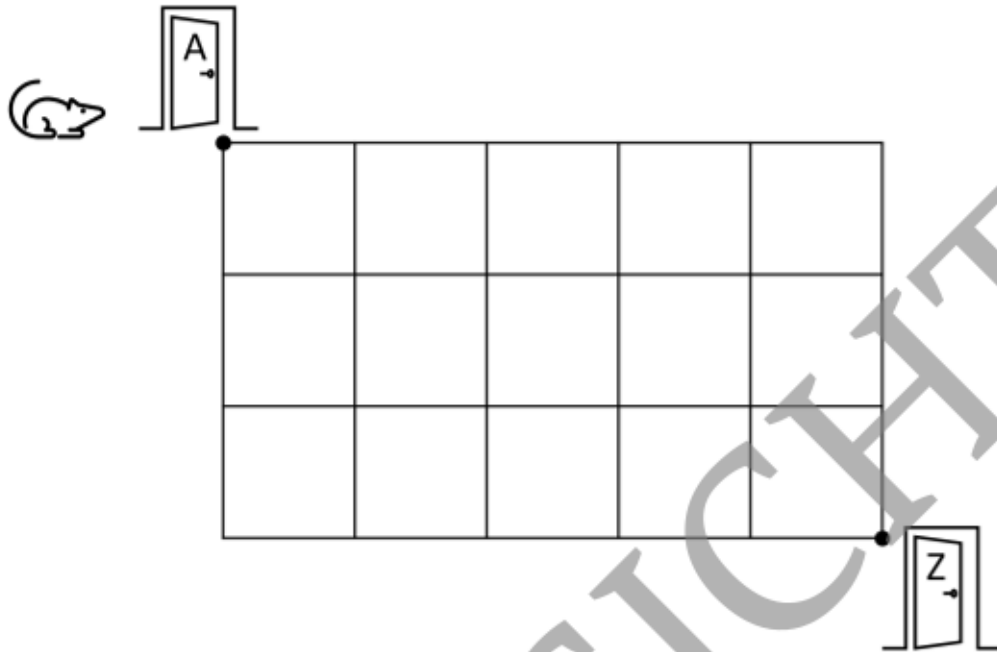
Erklärung zu den Symbolen

 Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
 einfaches Niveau	 mittleres Niveau	 schwieriges Niveau
 Zusatzaufgaben	 Alternative	 Selbsteinschätzung

M 1

Einstieg: Die Maus im Gitterlabyrinth

Eine Maus durchläuft ein Gitterlabyrinth ausgehend vom Eingang A bis zum Ausgang Z. Das Gitterlabyrinth lässt sich wie folgt skizzieren, wobei die Linien die möglichen Wege darstellen:



Wir gehen davon aus, dass die Maus wahnsinnig intelligent ist und keinen Weg zurückgeht. Das heißt, sie wählt den Weg minimaler Länge von A nach Z. Wie viele unterschiedliche Wege könnte sie demnach wählen?

Aufgabe

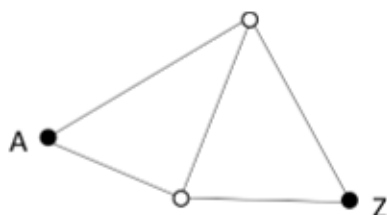
- Überlegen** Sie sich, wie Sie diese Realsituation in einem mathematischen Modell beschreiben können. **Brainstormen** Sie hierzu, welche mathematischen Modelle Sie kennen, die zur Lösung der Fragestellung hilfreich sein könnten.
- Tauschen** Sie sich mit einer anderen Person über Ihre Brainstorming-Ergebnisse aus.
- Diskutieren** Sie zu zweit, welches Modell Ihnen am effizientesten erscheint, und **beantworten** Sie die Frage mithilfe des Modells.

Notizen:

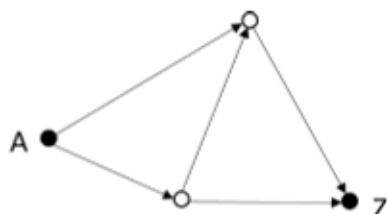
Minimalwege im Koordinatengitter – Graphentheorie

M 2

Graphen im Sinne der Graphentheorie



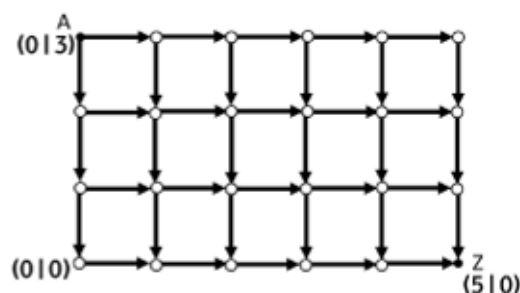
Ein Graph im Sinne der Graphentheorie besteht aus Knoten und Kanten. Die Kringel heißen Knoten, deren Verbindungslinien Kanten. Eine Irrfahrt auf dem Graphen beginnt in A und endet in Z.



In einem gerichteten Graphen werden die Kanten nur in Pfeilrichtung durchlaufen.

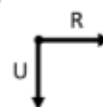
In einem endlichen, gerichteten Graphen wird eine Kante nur einmal durchlaufen. Die Anzahl der Knoten ist endlich.

Ebenes Koordinatengitter – ein spezieller endlicher, gerichteter Graph



Lässt man in einem rechtwinkligen Koordinatensystem nur ganzzahlige Gitterpunkte zu, so entsteht ein Koordinatengitter.

Minimalwege von A nach Z verlaufen in nebenstehendem Koordinatengitter nach rechts oder nach unten.



Das Wegzählverfahren

Die Frage nach der Anzahl aller möglichen Minimalwege kann mit einem Wegzählverfahren beantwortet werden.

	1 Weg führt von A nach Z.
	2 Wege führen von A nach Z.
	6 Wege führen von A nach Z. 3 Wege von A nach Z führen über die untere Kante KZ.

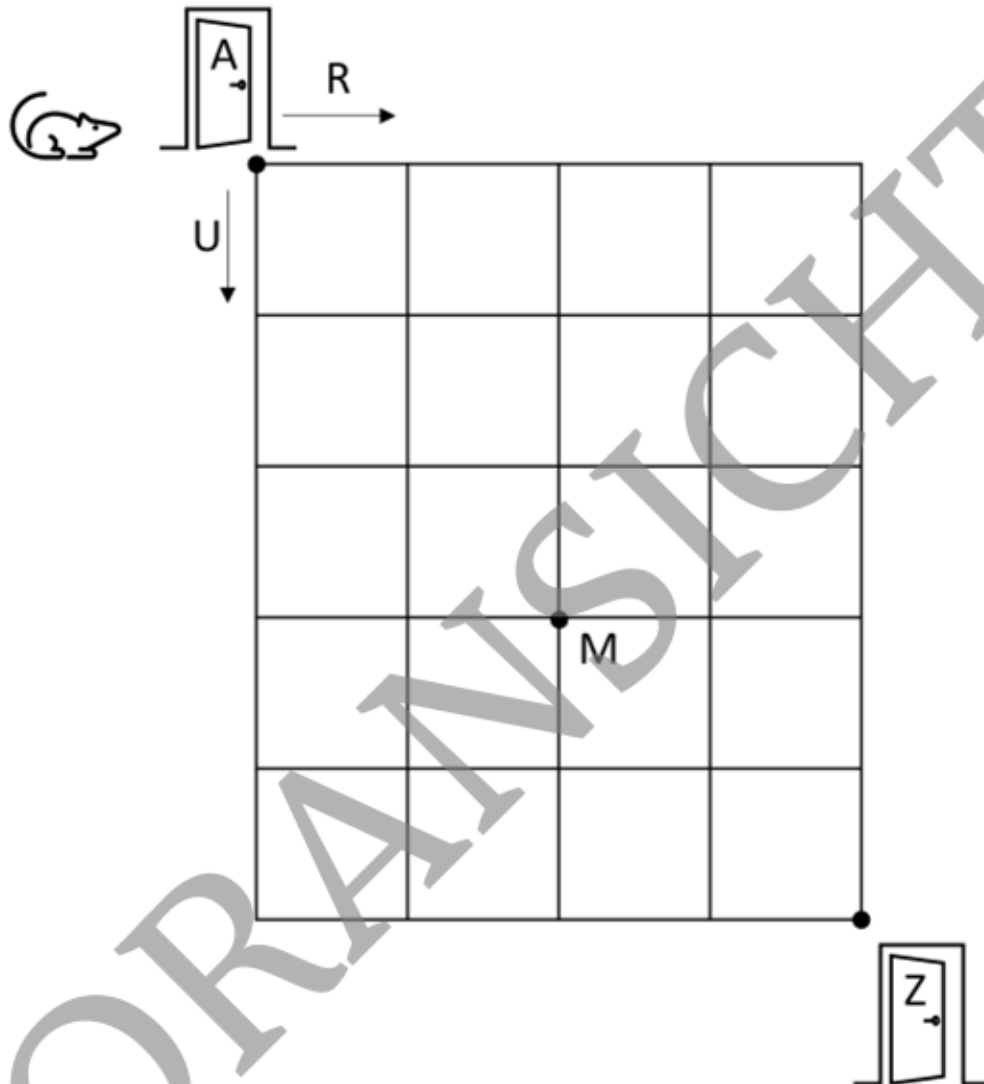
M 3



Übung: Die Maus im Gitterlabyrinth – Minimalwege über einen Knoten und Knoten als Störstelle

Aufgabe 1

Eine Maus durchläuft ein Gitterlabyrinth ausgehend vom Eingang A bis zum Ausgang Z. Das Gitterlabyrinth lässt sich wie folgt skizzieren:



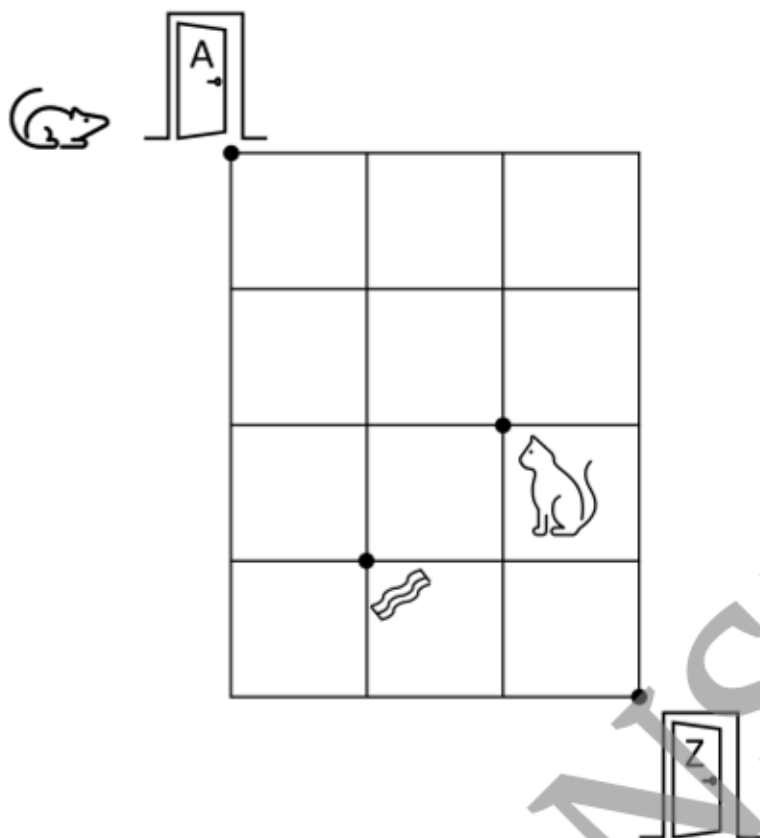
Wir gehen davon aus, dass die Maus wahnsinnig intelligent ist und keinen Weg zurückgeht. Darüber hinaus nehmen wir an, dass die Maus keine Präferenzen in der Wegwahl hat. Das heißt, die Wahl, ob sie nach rechts oder unten läuft, ist gleich wahrscheinlich. Man könnte sagen, es handelt sich um eine „Laplace-Maus“.

- Ermitteln** Sie, auf wie vielen Wegen die Maus vom Start A zum Ziel Z gelangen kann.
Bestimmen Sie dies sowohl mit kombinatorischen Überlegungen als auch über das Wegzählverfahren.
- Ermitteln** Sie, wie viele Wege über M führen. Man beantworte diese Frage auch mit dem Wegzählverfahren.
Bestimmen Sie dies sowohl mit kombinatorischen Überlegungen als auch über das Wegzählverfahren.
- Berechnen** Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Maus den Knoten M nicht passieren wird.



Aufgabe 2

Eine hungrige Maus durchläuft den Weg durch ein Gitterlabyrinth ausgehend vom Eingang A bis zum Ausgang Z. Dabei ist eine Katze an einem Knotenpunkt und ein Streifenspeck an einem anderen Knotenpunkt platziert. Das Gitterlabyrinth lässt sich wie folgt skizzieren:



a) **Überlegen** Sie sich:

Welche Fragestellungen ergeben sich bei diesem Experiment?

Welche Annahmen müssen getroffen werden, um eine mathematische Modellierung zuzulassen?

b) **Führen** Sie benötigte Rechnungen **aus** bzw. **nutzen** Sie das Wegzählverfahren, um Ihre Fragestellungen zu beantworten.

Aufgabe 3

a) **Überlegen** Sie sich selbst ein Labyrinth im Gitterformat. Variieren Sie dazu die Größe des Gitters (Anzahl der Kanten), die Anzahl der Katzen und/oder des Specks.

b) **Tauschen** Sie Ihr Gitterlabyrinth mit einer anderen Person. **Beantworten** Sie die Fragen 1. und 2. mithilfe des Wegzählverfahrens und **führen** Sie die benötigten Rechnungen **aus**.

1. Wie groß ist die Überlebenschance der Maus?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maus hungrig das Labyrinth verlässt, wie groß, dass sie satt wird?

Challenge

Schaffen Sie es, ein Labyrinth zu kreieren, bei dem die Maus genau 50 % Überlebenschance hat?

Skizzieren Sie ein passendes Gitterlabyrinth.



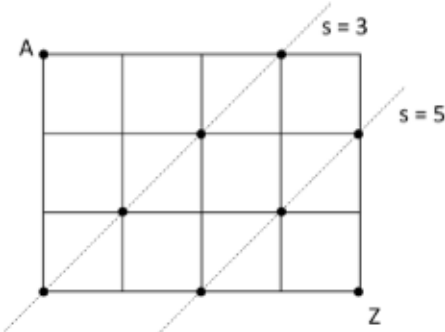


Aufgabe 4

Sperrlinie im Gitter

Alle Knoten, die von A aus über s Kanten auf Minimalwegen zu erreichen sind, liegen auf einer Geraden, die wir **Sperrlinie** nennen wollen.

Beispiel:



Jeder Minimalweg von A nach Z läuft über genau einen Knoten einer Sperrlinie.

Jede Sperrlinie eignet sich also zum Abzählen der Wege von A nach Z.

- a) **Bestimmen** Sie die Anzahl der Minimalwege vom Anfangspunkt A zum Endpunkt Z eines $(3 | 4)$ -Gitters an der Sperrlinie $s = 4$.

Bestimmen Sie die Summe der Minimalwege, die über die Knoten der Sperrlinie $s = 4$ von A nach Z eines $(3 | 4)$ -Gitters laufen, und **vergleichen** Sie das Ergebnis mit der Summe aller Minimalwege von A nach Z.

- b) **Zeigen** Sie an einem Gitter die Richtigkeit der Formel

$$\sum_{v=0}^{v=3} \binom{3}{3-v} \binom{n}{v} = \binom{3+n}{3}.$$

Hinweis: **Bestimmen** Sie zuerst ein geeignetes Gitter, dann die Sperrlinie.

- c) **Erläutern** Sie die entsprechende Beziehung der Formel in b) in einem $(n | n)$ -Gitter mit der Sperrlinie $s = n$ und **geben** Sie die entsprechende Formel an.