Stochastik

Wahrscheinlichkeitsverteilungen – Schlafverhalten mathematisch betrachtet

Nach einer Idee von Mona Hitzenauer

Guter Schlaf ist wichtig für Lernprozesse, Stressbewältigung und vieles mehr. Doch was bedeutet guter Schlaf? In dieser Unterrichtseinheit setzen sich die Lernenden mit diskreten und stetigen Zufallsgrößen bzw. Verteilungen auseinander und lernen im Besonderen die Normalverteilung kennen. Dabei werden sie aufgefordert, sich mit ihrem eigenen Schlafverhalten zu beschäftigen, und erkennen die Wichtigkeit von gesundem und ausreichendem Schlaf. In einer Klassenumfrage nutzen sie digitale Werkzeuge zum Sammeln und Auswerten der Daten und stärken ihre digitalen Kompetenzen und Fähigkeit zur Teamarbeit.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11–13
Dauer:	6 Unterrichtsstunden (Minimalplan 3)
Kompetenzen:	mathematisch modellieren (K3), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), kommunizieren (K6)
Inhalt:	diskrete und stetige Zufallsgrößen, Wertemenge, Dichte- und Verteilungsfunktion, Normalverteilung, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Histogramme, Graphen

Auf einen Blick

Planung für 6 Stunden

Einstieg

M 1	Gut geschlafen?
Benötigt:	☐ OH-Projektor bzw. Beamer/Whiteboard

Erarbeitung

M 2	Diskrete und stetige Zufallsgrößen
M 3	Zufallsgrößen unterscheiden
M 4	Normalverteilung
M 5	Wie steht es um Ihren Schlaf?
M 6	Eine Klassenumfrage zum Thema Schlaf erstellen

Lernerfolgskontrolle

M 7	Können Sie den Lerninhalt im Schlaf?

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 16.

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Die Materialien bauen zwar aufeinander auf, allerdings können sie auch getrennt voneinander eingesetzt werden. Wählen Sie daher einfach die Materialien aus, die Sie einsetzen möchten.

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.		
einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau
Zusatzaufgaben	Alternative	Selbsteinschätzung

M 1 Einstieg: Gut geschlafen?

© xubingruo/E+

sarah.mit.h

Gefällt 78 Mal

sarah.mit.h habt ihr heute gut geschlafen? Wusstet ihr das Schlaf politisch ist? „Schlafgerechtigkeit für globale Gesundheit" lautet das Motto des Weltschlaftags 2024. Die internationale Initiative wurde von @worldsleepsociety ins Leben gerufen. Coole Aktion!

Alle 17 Kommentare ansehen

Kommentieren …

thom.sanders Heutzutage ist auch alles politisch! Aber auch nur weil die Politiker schlafen. 😴 🤣

1 Wo. Gefällt 3 Mal Antworten

harald.boehm.offiziell @thom.sanders bitte informiere dich. Selbst @tagesschau hat davon berichtet. Kannst du dir hier nochmal angucken: https://www.youtube.com/watch?v=MAw_FDLpEsA

1 Wo. Gefällt 42 Mal Antworten

jan.w Na, was heißt denn da gut?! Ist doch auch erstmal Definitionsfrage. Ich würde sagen, ich habe „normal" geschlafen…

1 Wo. Gefällt 14 Mal Antworten

Profilbilder © colourbox; Emojis © bortonia/DigitalVision Vectors

Erarbeitung: Diskrete und stetige Zufallsgrößen

M 2

„Man, bin ich heute wieder müde!" Kennen Sie das? Sie sind eigentlich früh ins Bett gegangen, aber fühlen sich trotzdem völlig unausgeschlafen? Nicht nur die Schlafdauer, sondern auch die Schlafqualität entscheidet über einen fitten Morgen. Besonders wichtig ist dabei der Tiefschlaf, eine Schlafphase, in der sich besonders der Körper erholt und regeneriert. Untersucht man 100 Personen im Schlaflabor, erreichen allerdings nicht alle die empfohlene Tiefschlafdauer.
Eine Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Personen, die die empfohlene Tiefschlafdauer aufweisen. X kann damit die ganzzahligen Werte von 0 bis 100 annehmen.

Eine Zufallsgröße X nennt man **diskret**, wenn die Menge der Werte, die sie annehmen kann, endlich oder abzählbar unendlich ist.
Ihre **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ordnet jeder Zahl x der Wertemenge eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ zu.
Ihre **kumulative Verteilungsfunktion** ordnet jeder Zahl x der Wertemenge eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$ zu.
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung und kumulative Verteilungsfunktion lassen sich graphisch z. B. mit **Histogrammen** bzw. **Treppenfunktionen** darstellen.

Nun interessiert man sich dafür, welcher Anteil des Schlafes in der Tiefschlafphase verbracht wird. Eine Zufallsgröße Y gibt diesen Wert in Prozent an. Y kann grundsätzlich alle Werte im Intervall [0; 100] annehmen.

Eine Zufallsgröße X nennt man **stetig**, wenn die Menge der Werte, die sie annehmen kann, überabzählbar unendlich ist.
Ihre **Wahrscheinlichkeitsverteilung** ordnet jeder Zahl x der Wertemenge die Wahrscheinlichkeit $P(X = x) = 0$ zu.
Ihre **Verteilungsfunktion** ordnet jedem Intervall [a; b] der Wertemenge mithilfe der **Dichtefunktion** $f(x)$ folgende Wahrscheinlichkeit zu:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung, Verteilungsfunktion und Dichtefunktion lassen sich graphisch mit **stetigen Funktionsgraphen** darstellen.

Aufgabe 1
Recherchieren Sie die Begriffe „abzählbar unendliche Menge" und „überabzählbar unendliche Menge" und geben Sie jeweils Beispiele solcher Mengen an.

Aufgabe 2
Erklären Sie die Begriffe „Wahrscheinlichkeitsverteilung" und „kumulative Verteilungsfunktion" in Bezug auf eine diskrete Zufallsgröße.

Aufgabe 3

Nehmen Sie **Stellung** zu den Aussagen und **korrigieren** Sie sie, wenn nötig.

a) Der Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilung an der Stelle x einer diskreten Zufallsgröße X gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ an.

b) Der Wert der Dichtefunktion f an der Stelle x einer stetigen Zufallsgröße X gibt die Wahrscheinlichkeit $P(X = x)$ an.

Aufgabe 4

Durchschnittlich erreichen 40 % aller Menschen die empfohlene Tiefschlafdauer. Es werden 100 Personen im Schlaflabor untersucht. Eine Zufallsgröße X zählt die Anzahl der Personen, die die empfohlene Tiefschlafdauer aufweisen.

a) **Geben** Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X **an**.

b) **Stellen** Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X als Histogramm **dar**.

c) **Geben** Sie die Funktion der kumulativen Wahrscheinlichkeitsverteilung von X **an**.

d) **Stellen** Sie die kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung von X graphisch **dar**.

Aufgabe 5

Der Schlaf von 100 Personen wird im Schlaflabor aufgezeichnet. Eine Zufallsgröße Y modelliert die Zeit bis zum ersten Aufwachen innerhalb eines Zeitintervalls von 8 Stunden.

a) **Geben** Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Y **an**.

b) **Zeichnen** Sie den Graphen der Verteilungsfunktion. Die Dichtefunktion von Y lautet $f(x) = \frac{1}{8}$.

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass bei einer stetigen Zufallsgröße X für alle x aus ihrer Wertemenge stets $P(X = x) = 0$ gilt.

Aufgabe 7

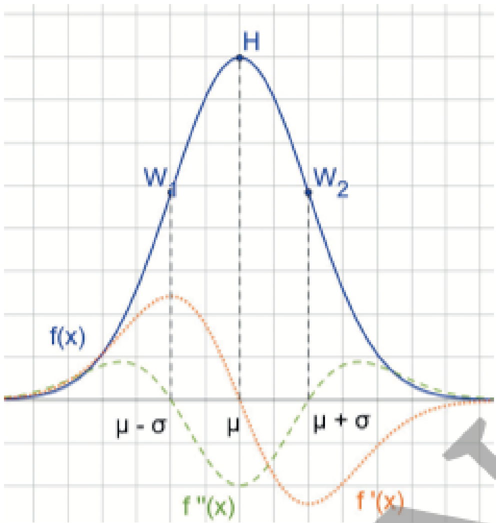
X sei eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion $f(x)$. Das Intervall [a; b] ist in der Wertemenge von X enthalten.

Beweisen oder **Widerlegen** Sie: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

M 5 Wie steht es um Ihren Schlaf?

Verschiedenste Schlafparameter unterliegen einer Normalverteilung. Als „normal“ bzw. „gesund“ wird oft der Bereich der einfachen oder doppelten Standardabweichung um den Erwartungswert herum definiert. Dabei handelt es sich um eine grobe Einschätzung, die nur ein Anhaltspunkt sein kann.

Liegt der Graph der Dichtefunktion $f(x)$ der Normalverteilung vor, kann man den Erwartungswert μ mithilfe des Hochpunktes H (Maximum) ablesen. und die x-Koordinaten der Wendepunkte $W_{1,2}$ befinden sich im Abstand von σ (Standardabweichung) um den Erwartungswert.
Vergleichen Sie dazu folgende Abbildung:



Grafik: Mona Hitzenauer

Liegt der Term $f(x)$ der Dichtefunktion der Normalverteilung vor, kann man den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ direkt ablesen bzw. den Term so umformen, dass die Parameter abgelesen werden können.
Es ist:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Aufgabe 1

Notieren Sie sich zunächst folgende Daten über sich selbst:

- Durchschnittliche Uhrzeit des Zubettgehens am Abend
- Geschätzte durchschnittliche Zeit im Bett bis zum Einschlafen (in Minuten)
- Durchschnittliche Schlafdauer (in Stunden, z. B. 8,5 h)

Die unten stehenden Dichtefunktionen modellieren eine ideale bzw. durchschnittliche Gruppe junger Erwachsener. Entnehmen Sie den Dichtefunktionen jeweils den Erwartungswert und die Standardabweichung. Bestimmen Sie dann jeweils das Intervall der einfachen, doppelten und dreifachen Standardabweichung um den Erwartungswert. Beachten Sie dabei sinnvolle Definitionsmengen.

M 6 Eine Klassenumfrage zum Thema Schlaf erstellen

Aufgabe 1

Sammeln Sie mit einem geeigneten Werkzeug bzw. Programm Daten von möglichst allen Personen Ihrer Lerngruppe über die Schlafparameter aus **M 5**:

- Durchschnittliche Uhrzeit des Zubettgehens am Abend
- Geschätzte durchschnittliche Zeit im Bett bis zum Einschlafen (in Minuten)
- Durchschnittliche Schlafdauer (in Stunden, z. B. 8,5 h)

Aufgabe 2

Finden Sie sich in drei Gruppen **zusammen** und **werten** Sie je einen Datensatz z. B. mit einem Tabellenkalkulationsprogramm aus:

a) **Zeichnen** Sie ein Histogramm (je nach Programm müssen Sie dazu die Daten in Intervalle einteilen).

b) **Zeichnen** Sie ein weiteres Histogramm mit einer größeren Anzahl von Intervallen (etwa die Hälfte ihrer Gesamtdatenanzahl).

c) **Nähern** Sie das Histogramm aus b) mithilfe einer Normalverteilung an. Wählen Sie dazu den Erwartungswert und die Standardabweichung entsprechend.

d) **Vergleichen** Sie diese Normalverteilung mit der passenden Normalverteilung aus der Studie bzw. Aufgabe 1) aus **M 5**. **Erläutern** Sie Gemeinsamkeiten, Unterschiede bzw. mögliche Abweichungen und versuchen Sie diese zu erklären. Recherchieren Sie dazu auch im Internet.

Aufgabe 3

Stellen Sie Ihre Ergebnisse der Klasse **vor**.

Lernerfolgskontrolle: Können Sie den Lerninhalt im Schlaf? M 7

Aufgabe 1

Erklären Sie allgemein und an Beispielen den Unterschied zwischen einer diskreten und stetigen Zufallsgröße.

Aufgabe 2

Erklären Sie die Begriffe Wahrscheinlichkeitsverteilung, (kumulierte) Verteilungsfunktion und Dichtefunktion. **Behandeln** Sie dabei diskrete und stetige Zufallsgrößen getrennt.

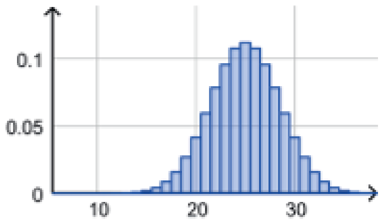
Aufgabe 3

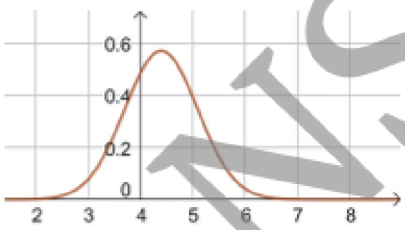
Ordnen Sie die Begriffe, Tabellen, Formeln, Beispiele und graphischen Darstellungen einer diskreten oder stetigen Zufallsgröße zu. **Begründen** Sie Ihre Zuordnung.

X	–1	0	1	5
$P(X = x)$	0,5	0,1	0,2	0,2

Binomialverteilung, Normalverteilung, $P(X = x) = 0$ für alle x, $P(X \leq 3) = \int_0^3 \frac{1}{6}\,dx$

$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1 - p)^{n-x}$, $f(x) = \frac{1}{6}$, Dichtefunktion, $P(3 \leq X \leq 5) = \sum_{i=3}^{5} P(X = i)$,





Aufgabe 4

Laut der KiGGS-Langzeitstudie schlafen 6- bis 12-jährige Mädchen durchschnittlich 9,8 Stunden. 87 % der Mädchen in dieser Altersklasse erreichen die für sie empfohlene Schlafdauer von 9–12 Stunden. Die Schlafdauer der Schulkinder wird mit einer normalverteilten Zufallsgröße modelliert. Als Erwartungswert wählt man die durchschnittliche Schlafdauer und die Standardabweichung stellt man bei 0,7 ein.

a) **Geben** Sie den Term der Dichtefunktion **an** und **zeichnen** Sie sie.

b) **Zeichnen** Sie die Verteilungsfunktion F. **Erklären** Sie den Wert $F(12)$ im Sachzusammenhang.

c) **Bestimmen** Sie $P(9 \leq X \leq 12)$. **Erklären** Sie diese Wahrscheinlichkeit im Sachzusammenhang und **vergleichen** Sie Ihr Ergebnis.

Aufgabe 5

Entnehmen Sie der Dichtefunktion der Normalverteilung den Erwartungswert und die Standardabweichung:

$f(x) = (18\pi)^{-0,5} \cdot e^{-\frac{1}{18}x^2 + \frac{8}{9}x - \frac{32}{9}}$