II.A.50

Analysis

Zentrale Themen der Analysis in abiturvorbereitenden Lernerfolgskontrollen

Udo Mühlenfeld

Sie wollen kurz vor dem Abitur Wissenslücken bei den Lernenden aufdecken und schließen? Diese Unterrichtseinheit ermöglicht den Lernenden, ihr Wissen zu den zentralen Themen der Analysis „Funktionen als mathematische Modelle", „Fortführung der Differenzialrechnung, Grundverständnis des Integralbegriffs" und „Integralrechnung" weitgehend selbstständig zu überprüfen. In dem Material wird jeweils zwischen dem grundlegenden und dem erhöhten Anforderungsniveau differenziert. Zu jeder Aufgabe bieten Tippkarten außerdem zusätzliche Differenzierungsmöglichkeiten.

KOMPETENZPROFIL

LearningApps - interaktive Lernbausteine

Klassenstufe:	Sek. II
Dauer:	4 Unterrichtsstunden (Minimalplan 1)
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), Kommunizieren (K6)
Inhalt:	ganzrationale Funktionen, e-Funktionen, Steigung, Krümmung, Extremwerte, Änderungsraten, Obersumme, Untersumme, bestimmtes Integral, Flächeninhalte, Rotationskörper
Medien:	GTR

Auf einen Blick

1. Lernerfolgskontrolle

Thema: **Funktionen als mathematische Modelle**

M 1 Funktionen als mathematische Modelle (GK)
M 2 Funktionen als mathematische Modelle (LK)

2. Lernerfolgskontrolle

Thema: **Fortführung der Differenzialrechnung**

M 3 Fortführung der Differenzialrechnung (GK)
M 4 Fortführung der Differenzialrechnung (LK)

3. Lernerfolgskontrolle

Thema: **Grundverständnis des Integralbegriffs**

M 5 Grundverständnis des Integralbegriffs (GK)
M 6 Grundverständnis des Integralbegriffs (LK)

4. Lernerfolgskontrolle

Thema: **Integralrechnung**

M 7 Integralrechnung (GK)
M 8 Integralrechnung (LK)

Tippkarten

M 9 Tippkarten zu den Lernerfolgskontrollen

Lösung

Die **Lösungen** zu den Materialien finden Sie ab Seite 18.

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau

Funktionen als mathematische Modelle (GK)

M 1

Aufgabe: Tunnelquerschnitte

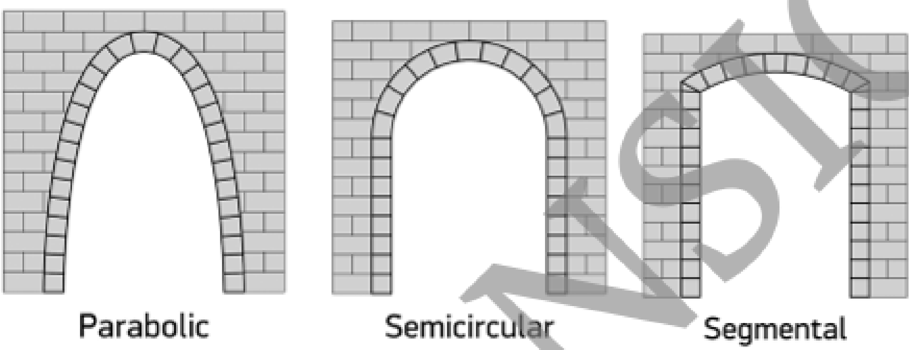
Es gibt Straßentunnel, deren Querschnitte sich durch Parabeln modellieren lassen:

a) **Ermitteln** Sie anhand des Fotos die lichte Höhe des Parabelbogens sowie die maximale Breite, wobei das Geländer im Foto real 1,40 m hoch ist.

b) **Berechnen** Sie mithilfe einer geeigneten Modellfunktion, wie hoch ein 2,30 m breiter Transporter maximal sein darf, um diesen Tunnel zu durchfahren.

c) **Untersuchen** Sie, ob sich für den Transporter eine größere Durchfahrtshöhe ergibt, wenn für den Querschnitt bei gleicher maximaler Breite und Höhe ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis gewählt wird („Semicircular").

© kilhan/iStock/Getty Images Plus



© pialhovik/iStock/Getty Images Plus

d) **Erläutern** Sie, welchen Vorteil das Modell „Segmental" in der Praxis bietet.

e) **Betrachten** Sie folgende Modelle (Ursprung des Koordinatensystems mittig auf der Straße, y-Achse senkrecht zur Straße):

„Parabolic": $f(x) = -2{,}4x^2 + 3{,}75$

„Semicircular": Höhe des Rechtecks: 2,50 m

„Segmental": $g(x) = -0{,}48x^2 + 3{,}75$; Höhe des Rechtecks: 3 m

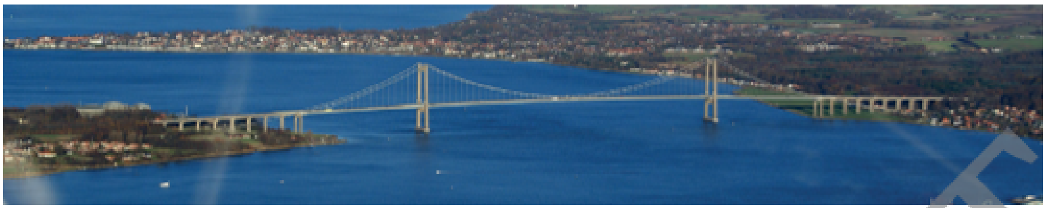
Zeigen Sie, dass alle Tunnelquerschnitte die gleiche maximale Breite und Höhe haben.

f) **Ermitteln** Sie für alle drei Modelle rechnerisch, über welche Fahrbahnbreite die Durchfahrtshöhe mindestens 3,20 m beträgt.

M 2 Funktionen als mathematische Modelle (LK)

Aufgabe: Hängebrücke und Kettenlinie

Die „neue" Brücke über den kleinen Belt in Dänemark ist mittlerweile fünfzig Jahre alt, eine 1700 m lange Hängebrücke mit einer Spannweite von 600 m zwischen den beiden Pfeilern.



© Thue C. Leibrandt/Wikimedia; Creative Commons

Die beiden Pfeiler sind oberhalb der Fahrbahn 70 m hoch. Der tiefste Punkt der beiden Tragkabel liegt 3 m über der Fahrbahn. Die vertikalen Tragseile haben zueinander einen Abstand von 28,1 m.

a) **Beschreiben** Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die Lage eines Tragkabels zwischen den beiden Pfeilern durch eine Parabel.

b) In einem anderen Modell lässt sich der Verlauf eines Tragkabels auch durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = a \cdot (e^{b \cdot x} + e^{-b \cdot x}); a, b > 0$ beschreiben. **Ermitteln** Sie die Werte für die Parameter a und b.

c) **Stellen** Sie beide Graphen in einem gemeinsamen Koordinatensystem **dar** und **vergleichen** Sie beide Modellierungen.

d) **Berechnen** Sie in beiden Modellen jeweils die Länge des ersten vertikalen Tragseils neben einem Pfeiler.

e) **Ermitteln** Sie die Stelle(n) mit dem größten vertikalen Abstand der Funktionen.

f) **Berechnen** Sie in beiden Modellen die Steigung des Tragkabels an den Pfeilerspitzen und **vergleichen** Sie die mit dem Verlauf des Tragkabels in der Abbildung.

g) In Bezug auf den tiefsten Punkt hat der linke Aufhängepunkt L in der untenstehenden Grafik die Koordinaten L(–66|110) und der rechte Aufhängepunkt R die Koordinaten R(45|50). Alle Angaben in cm.
Ermitteln Sie rechnerisch den größten Durchhang in Bezug auf die Verbindungslinie der Aufhängepunkte.

Grafik: U. Mühlenfeld

Tippkarten zu den Lernerfolgskontrollen

M 9

Tippkarte zu M 1	
Zu b)	Wählen Sie den Ursprung des Koordinatensystems so, dass der Funktionsterm möglichst einfach wird.
Zu c)	Ermitteln Sie erst den Kreisradius, fertigen Sie eine Skizze und verwenden Sie den Satz des Pythagoras.
Zu d)	Überlegen Sie, welche Größe für den fließenden Verkehr von Bedeutung ist.
Zu f)	Der Funktionswert ist gegeben. Die Höhe setzt sich bei „Semicircular" aus zwei Teilstrecken zusammen.

Tippkarte zu M 2	
Zu a)	Wählen Sie den Ursprung des Koordinatensystems so, dass der Funktionsterm möglichst einfach wird.
Zu b)	Verwenden Sie den GTR zum Lösen der Gleichungen.
Zu c)	Gehen Sie beim Vergleich z. B. auf den Verlauf und die gegenseitige Lage ein.
Zu d)	Notwendige Informationen finden Sie im Text.
Zu e)	Der Operator „ermitteln" ermöglicht den Einsatz des GTR zur numerischen Lösung.
Zu f)	Der Steigungswinkel ist eine geeignete Vergleichsgröße.
Zu g)	Machen Sie sich klar, dass der Tiefpunkt der Parabel als Lösung nicht infrage kommt.

Tippkarte zu M 3	
Zu b)	Skizzieren Sie bei konstanter Querschnittsfläche mögliche unterschiedliche Formen für den Querschnitt.
Zu d)	Der Fokus liegt jetzt auf der Innenfläche. Setzen Sie bei der Lösung der Extremwertaufgaben gegebenenfalls den GTR ein.
Zu e)	Vergleichen Sie die Innenflächen, denken Sie auch an Ihnen bekannte Formen der Dachrinnen.