II.B.32

Lineare Algebra und analytische Geometrie

Übergangsprozesse – Matrizen im Sachkontext der Populationsentwicklung

Mona Hitzenauer

Mona Hitzenauer © RAABE

Populationsentwicklungen im Pflanzen- und Tierreich bieten einen interessanten Anwendungskontext für Übergangsprozesse. In den Aufgaben beschäftigen sich die Jugendlichen mit Übergangsgraphen, Tabellen sowie Übergangsmatrizen und berechnen mit einem Matrix-Vektor-Produkt Bestände nach verschiedenen Zeiträumen. Neben den mathematischen Inhalten sind Themen der Bildung für nachhaltige Entwicklung verwoben, etwa im Kontext der FSME-Impfung und der Gentechnik.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	12
Dauer:	10–12 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit mathematischen Objekten umgehen (K5), mit Medien mathematisch arbeiten (K7)
Inhalt:	Übergangsprozesse, Übergangsgraph, Tabelle, Gleichungssystem, Übergangsmatrix, Vektor, Produkt Matrix-Vektor

Auf einen Blick

Einstieg/Erarbeitung

M 1	Marienkäfer – Darstellungen von Übergangsprozessen kennenlernen
M 2	Populationsentwicklungen unter der Lupe: Gewürzernte
M 3	Populationsentwicklungen unter der Lupe: FSME
M 4	Populationsentwicklungen unter der Lupe: Genmücken
M 5	Übergangsgraphen digital erstellen

Benötigt: ☐ Digitale Endgeräte mit Internet

Lernerfolgskontrolle/Übung

M 6	Alles verstanden? – Testen Sie sich!

Minimalplan

Die Zeit ist knapp? Dann planen Sie die Unterrichtseinheit für 3–4 Stunden wie folgt:

M 1	Marienkäfer – Darstellungen von Übergangsprozessen kennenlernen
M 2	Populationsentwicklungen unter der Lupe: Gewürzernte, Aufgabe 1 und 2
M 3	Populationsentwicklungen unter der Lupe: FSME, Aufgabe 2 und 3

Erklärung zu den Symbolen

Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.

einfaches Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau

Marienkäfer – Darstellungen von Übergangsprozessen kennenlernen

M 1

Es muss nicht immer die Chemiekeule sein. Gegen viele Schädlinge gibt es auch natürlichere Mittel. So auch für die allseits „beliebte" Blattlaus. Sie ist nämlich die Leibspeise der Marienkäferlarve. Rund 50 Blattläuse vertilgt eine Larve am Tag und erwachsene Käfer sogar 100.

© Ragnar1904/Wikimedia Commons, CC BY-SA 4.0

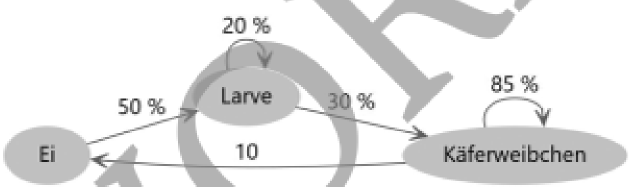
Nach der Paarung legt ein Käferweibchen seine Eier auf Sträucher und Gebüsch ab, die mit Blattläusen befallen sind. Geschützt an der Blattunterseite entwickeln sich daraus unter optimalen Bedingungen die nützlichen Larven (siehe Bild).
Zur Blattlausbekämpfung werden auf einem Johannisbeerstrauch in einem stets warmen Gewächshaus 100 Eier, 20 Larven und jeweils 10 weibliche und 10 männliche Käfer aufgebracht. Damit sich alle Käfer auch auf der Pflanze paaren und dort ihre Eier ablegen, wird der Strauch mit einem engmaschigen Netz umschlossen.
Unter den beschriebenen Bedingungen beobachtet man jeweils in Zeiträumen von einem Monat: 50 % der Eier entwickeln sich zu Larven, der Rest der Eier wird von Larven gefressen (Kannibalismus). 30 % der Larven reifen zu weiblichen Käfern heran, weitere 30 % werden zu Männchen, 20 % verbleiben im Larvenstadium und der Rest verhungert oder wird ebenso von anderen Larven gefressen. Weibliche Käfer legen in einem Beobachtungszeitraum im Schnitt 10 Eier und überleben zu 85 %.

Populationsentwicklung

Wir betrachten drei sogenannte Zustände: Ei (E), Larve (L) und weibliche Käfer (K) und die Übergänge zwischen den Zuständen in einem Beobachtungszeitraum von einem Monat. Wir nehmen für das Modell an, dass stets genügend Männchen zur Befruchtung vorhanden sind.

Übergangsgraph

Aus den gegebenen Informationen lässt sich ein sogenannter Übergangsgraph zeichnen:



Die „Übergänge" werden wie folgt bezeichnet:
- von einem Zustand zum gleichen Zustand als Überlebenswahrscheinlichkeiten.
- von „Käferweibchen" zu „Eier" mit Reproduktionsrate.

Üblicherweise zeichnet man keine Übergänge in den Tod (Sterbewahrscheinlichkeiten) ein.

Wichtig: Jeder Übergang muss sich stets auf ***den gleichen Zeitraum*** beziehen.
Die (Überlebens-)Wahrscheinlichkeiten bzw. (Reproduktions-)Zahlen müssen also entsprechend gegeben sein oder modelliert werden.

Tabelle

		Von Zustand ...		
		E	L	K
... nach Zustand ...	E	0	0	10
	L	0,5	0,2	0
	K	0	0,3	0,85

Lesebeispiele

Es entwickelt sich im Beobachtungszeitraum von Zustand E (Ei) nach Zustand L (Larve) die Hälfte.
Es gibt von Zustand E (Ei) nach Zustand K (weiblicher Käfer) im Beobachtungszeitraum keinen direkten Übergang.

Gleichungssystem

Den Anfangsbestand, also die Anzahl der Eier, Larven und weiblichen Käfer am Tag Null, bezeichnen wir mit E_0, L_0 und K_0, die Anzahlen nach einem Beobachtungszeitraum entsprechend mit E_1, L_1 und K_1.
Mit den Informationen aus dem Übergangsgraph bzw. der Tabelle und den gerade festgelegten Bezeichnungen können wir ein lineares Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} E_1 &= 0 \cdot E_0 + 0 \cdot L_0 + 10 \cdot K_0 \\ L_1 &= 0{,}5 \cdot E_0 + 0{,}2 \cdot L_0 + 0 \cdot K_0 \\ K_1 &= 0 \cdot E_0 + 0{,}3 \cdot L_0 + 0{,}85 \cdot K_0 \end{aligned}$$

Die Anzahlen mit Index null sind dabei bekannt, denn es wurden 100 Eier, 20 Larven und 10 weibliche Käfer aufgebracht. Sind die Anzahlen E_1, L_1 und K_1 bekannt, können wir daraus analog die Anzahlen E_2, L_2 und K_2 berechnen usw.
Das wird natürlich nach ein paar Schritten aufwendig. Es gibt aber eine einfache Methode mit der sogenannten Übergangsmatrix.

Übergangsmatrix

Klammern wir die Zahlen in der Tabelle (in der gleichen Anordnung) ohne Trennstriche ein, so erhalten wir die sog. Übergangsmatrix M:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}85 \end{pmatrix}$$

Wichtig: Die Zustandsänderungen müssen in der Tabelle stets ***von Spalte nach Zeile*** angeordnet sein, damit man die Übergangsmatrix direkt davon ableiten kann.

Populationsentwicklung mit der Übergangsmatrix berechnen

Mit dieser Übergangsmatrix, die für jeden Beobachtungszeitraum gleich ist, können wir nun schrittweise die Anzahlen der Eier, Larven und weiblichen Käfer in monatlichen Abständen berechnen. Den Anfangsbestand können wir auch mit einem Anfangsvektor darstellen:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ L_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor: Gerechnet wird „Zeile (der Matrix) mal Spalte (des Vektors)“:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,x + b\,y + c\,z \\ d\,x + e\,y + f\,z \\ g\,x + h\,y + i\,z \end{pmatrix}$$

Multiplizieren wir die Übergangsmatrix mit dem Anfangsvektor, so erhalten wir die Anzahlen der Eier, Larven und weiblichen Käfer nach einem Monat, also nach einem Beobachtungszeitraum:

$$M \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_1$$

$$M \cdot \begin{pmatrix} E_0 \\ L_0 \\ K_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ L_1 \\ K_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 10 \\ 0,5 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,85 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 100 + 0 \cdot 20 + 10 \cdot 10 \\ 0,5 \cdot 100 + 0,2 \cdot 20 + 0 \cdot 10 \\ 0 \cdot 100 + 0,3 \cdot 20 + 0,85 \cdot 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 100 \\ 54 \\ 14,5 \end{pmatrix}$$

Die Anzahlen nach einem Zeitraum sind also 100 Eier, 54 Larven und 14,5 weibliche Käfer. Klar gibt es keine halben (lebenden) Käfer, allerdings handelt es sich hier nur um eine Prognose, die auf Wahrscheinlichkeiten basiert. Es ist also nicht ungewöhnlich, wenn sich dadurch auch mal Kommazahlen als Anzahlen ergeben. Sinnvoll ist es daher, die Endergebnisse auf ganze Zahlen zu runden.

Population eines beliebigen Zeitraums berechnen

Mit dem neuen Bestandsvektor können wir jetzt den Bestand nach zwei Monaten analog berechnen:

$$M \cdot \vec{x}_1 = \vec{x}_2$$

Da $\vec{x}_1 = M \cdot \vec{x}_0$ gilt, ersetzen wir $\vec{x}_1$ in der oberen Gleichung und erhalten:

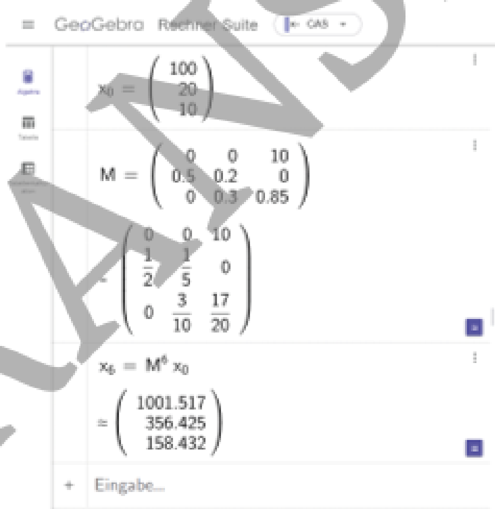
$$M \cdot M \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_2 \Leftrightarrow M^2 \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_2$$

Führen wir dies logisch fort, erhalten wir allgemein für den n-ten Monat:

$$M^n \cdot \vec{x}_0 = \vec{x}_n$$

Mit dieser Gleichung können wir mithilfe eines CAS (Computer-Algebra-Systems), z. B. GeoGebra CAS, sofort jeden Bestand berechnen. Etwa nach einem halben Jahr, also 6 Zeiträumen:

Übergangsmatrix M eingeben (zeilenweise):	M={{0,0,10},{0.5,0.2,0},{0,0.3,0.85}}
Anfangsvektor x_0 eingeben:	x_0={{100},{20},{10}}
Bestandsvektor x_6 berechnen:	x_6=M^6*x_0



Nach einem halben Jahr gibt es daher etwa 1002 Eier, 356 Larven und 158 Marienkäferweibchen auf dem Johannisbeerstrauch.

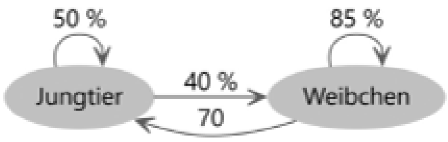
Nach einem halben Jahr frisst die bestehende Marienkäferpopulation an einem einzelnen Tag also rund

$$356 \cdot 50 + 158 \cdot 2 \cdot 100 = 49\ 400$$

Blattläuse.

Blattlauspopulation

Blattläuse durchlaufen im Frühjahr und Sommer meist geschlechtslose Entwicklungszyklen. Das heißt, es werden ohne Paarung nur Weibchen (lebend) geboren. Ohne die Marienkäfer beobachtet man in jeweils zehn Tagen auf dem Johannisbeerstrauch:



Aufgabe 1

Geben Sie die Übergangsmatrix der Blattlauspopulation **an**.

Aufgabe 2

Berechnen Sie mithilfe eines Gleichungssystems die Blattlauspopulation nach zehn Tagen, wenn am Anfang 1600 Jungtiere und 1600 Weibchen vorhanden sind.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mithilfe der Übergangsmatrix mit einem CAS die Blattlauspopulation nach 30 Tagen (ca. 1 Monat).

M 2 Populationsentwicklungen unter der Lupe: Gewürzernte

Mona Hitzenauer © RAABE

Kartoffelpüree, Kartoffelgratin, Blattspinat und Lebkuchen. In fast jedem Haushalt ist sie zu finden, und wird gerne meist frisch in die Gerichte gerieben. Doch kaum jemand weiß, wo und wie das Gewürz angebaut wird.

Der Baum, an dem sie wächst, fühlt sich nur in den Tropen wohl. Hohe Temperaturen und Luftfeuchtigkeit sind Voraussetzungen für ein gutes Wachstum und Ernte. Daher wird die Küchenzutat heute hauptsächlich in Indonesien, Sri Lanka und etwa Grenada angebaut. Erst nach 6–8 Jahren produziert die Pflanze erste Früchte, deren Samen wir als Muskatnuss kennen. Ihre volle Produktivität entfalten die Bäume schließlich nach ca. 15 Jahren. Auch der knallrote Samenmantel der Frucht wird als Gewürz – Macis – in die ganze Welt exportiert. Der Muskatnussbaum kennt keine Saison, er hat das ganze Jahr über Blüten, unreife und reife Früchte an seinen Ästen. Ist eine Frucht reif, platzt sie an einer Naht entlang auf und der Samenmantel bzw. die Nuss wird sichtbar (siehe Foto). Erst in diesem Stadium werden die Früchte geerntet (alle sechs Monate) und die Gewürze sorgfältig per Handarbeit extrahiert und getrocknet. Auch das Fruchtfleisch ist essbar, schmeckt auch leicht nach Muskatnuss und wird teilweise zu Marmelade weiterverarbeitet.

Betrachten Sie den Übergangsgraphen, der die Reifezustände innerhalb von sechs Monaten an mehreren Bäumen einer Plantage beschreibt.

Aufgabe 1

Interpretieren Sie den Übergangsgraph und **beschreiben** Sie die Informationen, die er bereitstellt (und welche nicht) sowie mögliche Gründe.

Aufgabe 2

Korrigieren Sie die zugehörige Übergangsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2300 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Betrachten Sie eine Plantage, deren Bäume zum Anfangszeitpunkt 1000 Blüten, 500 unreife und 200 reife Früchte tragen. **Berechnen** Sie, wie viele reife Früchte nach sechs Monaten geerntet werden können, wenn 50 % der reifen Früchte geerntet werden.

Aufgabe 4

Berechnen Sie, nach wie vielen Ernteperioden die Plantage keine Blüten (gerundet) mehr produziert.

Populationsentwicklungen unter der Lupe: Genmücken

M 4

Aedes aegypti, ein hübscher Name für ein kleines, aber dennoch gefährliches Tier. Die Ägyptische Tigermücke überträgt in den Tropen und Subtropen zahlreiche Viruserkrankungen, etwa Gelb- und Denguefieber sowie Zika.

© James Gathany/Wikimedia Commons, gemeinfrei

Beobachtungen im Versuch

In einem Zeitraum von jeweils 5 Tagen beobachtet man unter möglichst natürlichen Bedingungen in einem Versuchsaufbau folgende Entwicklungen, wobei die Geschlechter in allen Stadien stets ausgeglichen sind:
Aus 80 % der Eier schlüpfen weibliche und männliche Larven. Der Rest der Eier entwickelt sich nicht weiter. In einem Beobachtungszeitraum wachsen insgesamt 30 % aller Larven zu Mücken heran und der Rest stirbt aus natürlichen Gründen, etwa durch Austrocknung oder Nahrungsmangel. Nur die weiblichen Mücken stechen mehrfach zu, denn sie brauchen die proteinhaltigen Blutmahlzeiten zur Eiproduktion. Im Gegensatz dazu besitzen die Männchen keinen Stechrüssel und ernähren sich von Nektar und Pflanzensäften. Alle Mücken paaren sich und die Weibchen legen im Schnitt jeweils 100 Eier ab. Nach der Eiablage sterben beide Geschlechter der Mücken.

Moderne Bekämpfung

Im Bundesstaat Florida (USA) wurde die Ägyptische Tigermücke vermutlich vom Menschen eingeschleppt und breitet sich schon seit einigen Jahren aus. Doch dort wird sie mit modernster Gentechnik bekämpft. Dazu wurden genetisch veränderte männliche Mücken gezüchtet, deren weibliche Nachkommen zu 90 % (unabhängig von anderen Todesursachen) aufgrund eines Gendefekts im Larvenstadium sterben. Der Rest entwickelt sich zu weiblichen Mücken ohne Genveränderung. Die männlichen Larven überleben hingegen wie im Normalfall und entwickeln sich zu männlichen Mücken, die das „weibchentötende" Gen in sich tragen.

Aufgabe 1

Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen zunächst für die normale Entwicklung und anschließend für die Nachkommen eines gentechnisch veränderten Männchens.

Aufgabe 2

Betrachten Sie zehn weibliche und zehn männliche genveränderte Mücken. **Berechnen** Sie die Anzahl der Eier nach 20 Tagen mithilfe einer Übergangsmatrix.

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit einem CAS, nach wie vielen Tagen es keine weiteren Nachkommen mehr gibt.

Aufgabe 4

Erstellen Sie digital den Übergangsgraphen der gentechnisch veränderten Mücken mithilfe des Infoblatts (**M 5**).

M 5 Übergangsgraphen digital erstellen

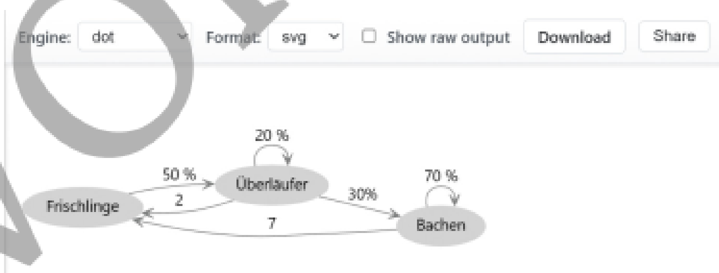
Übergangsgraphen können Sie mit vielen Werkzeugen auch digital erstellen. Das Open-Source-Programm Graphviz bietet eine besonders einfache Möglichkeit, dies zu tun.

Graphviz

Graphviz erstellt aus einer Textdatei mit Beschreibungen der Zustände/Knoten (nodes), Kanten/Linien (edges) sowie deren Beschriftungen (label) einen optisch ansprechenden Graph.
Sie können die Graphen direkt auf der Website
https://dreampuf.github.io/GraphvizOnline
beschreiben und zeichnen lassen.
Nach jeder Änderung in den Beschreibungen interpretiert Graphviz diese neu und zeichnet sie als Graph. Das Endprodukt können Sie z. B. als skalierbare Vektorgrafik (svg) oder Rastergrafik (png) herunterladen und weiterverwenden.

Beispiel:

```
digraph G {

   // Graph von links nach rechts zeichnen:
   rankdir=LR;

   // Darstellung für alle Zustände/Knoten definieren:
   // (Schriftart, gefüllt, graue Farbe, ovaler Knoten)
   node [fontname="Segoe UI",style=filled,color=lightgrey,shape=oval];
   // Darstellung für alle Kanten/Linien definieren:
   edge [fontname="Segoe UI",color=grey,arrowhead=open];

   // Beschreibung des Übergangs "Frischlinge" zu "Überläufer" ...
   // ... mit der Pfeilbeschriftung "50 %".
   Frischlinge -> Überläufer [label="50 %"];

   // Weitere Übergangsbeschreibungen
   Überläufer -> Überläufer [label="20 %"];
   Überläufer -> Bachen [label="30%"];
   Überläufer -> Frischlinge [label="2"];

   Bachen -> Bachen [label="70 %"];
   Bachen -> Frischlinge [label="7"];
}
```



Eine gute Dokumentation aller Möglichkeiten, die Ihnen Graphviz bei der Visualisierung bietet, finden Sie auf der Website https://graphviz.org/documentation/. Auch Chatbots können hilfreich sein, um die Beschreibungen der Graphen zu erstellen.