

Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Franke



© Yellow Dog Productions/The Image Bank

Kann man beim Roulettespiel sicher gewinnen? Wie begleichen Versicherungen hohe Schadensummen? Im vorliegenden Beitrag gehen die Jugendlichen diesen und vielen weiteren spannenden Fragen auf den Grund und beantworten sie durch anwendungsbezogenen Umgang mit Erwartungswerten, Varianzen und Standardabweichungen. Dabei stärken die Schülerinnen und Schüler durch motivierende Elemente ihre Kompetenzen im stochastischen Modellieren sowie im realitätsnahen Argumentieren und entwickeln außerdem ihre digitalen Fähigkeiten.

Erwartungswert und Standardabweichung – Glücksspiele und Versicherungen

Oberstufe (grundlegend)

von Dr. Jürgen Franke

Hinweise	1
M1 Erwartungswert und Standardabweichung	3
M2 Anwendungsaufgaben	11
M3 Tippkarte	13
M4 Versicherung	14
M5 Lotto	17
M6 Roulettespiel	20
M7 Martingalespiel	24
Lösungen	27

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Erwartungswerte, Varianzen und Standardabweichungen von Datensätzen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu berechnen. Sie begreifen, dass Verteilungen mit gleichem Erwartungswert trotzdem sehr unterschiedlich gestreut sein können. Der Beitrag hat einen starken Alltags- und Praxisbezug, beinhaltet z. B. Aufgaben zu Glücksspielen und Versicherungen, sodass die Jugendlichen die Relevanz der Stochastik im täglichen Leben erkennen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt FS Formelsammlung TK Tippkarten

Thema	Material	Methode
Erwartungswert und Standardabweichung	M1	AB, FS
Anwendungsaufgaben	M2	AB
Tippkarte	M3	TK
Versicherung	M4	AB
Lotto	M5	AB, FS
Roulettespiel	M6	AB
Martingalespiel	M7	AB

Kompetenzprofil:

- Inhalt:** Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung, Ereigniswahrscheinlichkeiten, Baumdiagramm, Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung
- Medien:** Tabellenkalkulationsprogramm
- Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Erklärung zu den Symbolen

 einfaches Niveau	 mittleres Niveau	 schwieriges Niveau
 Dieses Symbol markiert Zusatzaufgaben.		

Beispiel 1

Eine Mathematiklassenarbeit brachte in einer Klasse von 20 Schülerinnen und Schülern folgende Ergebnisse.

i	1	2	3	4	5	6
Noten x_i	1	2	3	4	5	6
Anzahl k_i	3	2	4	5	5	1

i	1	2	3	4	5	6
Noten x_i	1	2	3	4	5	6
Rel. Häufigkeit h_i	3/20	2/20	4/20	5/20	5/20	1/20

Wir definieren eine Zufallsgröße

$$X := \text{„Mathenote der Klassenarbeit von 1–6“}$$

und definieren die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse:

$$P(X = x_i) := h_i = \frac{k_i}{\sum_{i=1}^n k_i}$$

Anschließend berechnen wir den Erwartungswert der Zufallsgröße X mit der Formel

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i).$$

Es ergibt sich somit

$$\mu(X) = 1 \cdot \frac{3}{20} + 2 \cdot \frac{2}{20} + 3 \cdot \frac{4}{20} + 4 \cdot \frac{5}{20} + 5 \cdot \frac{5}{20} + 6 \cdot \frac{1}{20} = 3,5.$$

Zur Beantwortung der Frage, definieren wir eine Zufallsvariable:

X := „Insgesamte Verspätung in Minuten“

Diese kann vier unterschiedliche Werte annehmen. Damit ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

i	1	2	3	4
x_i	0	5	30	35
$P(X = x_i)$	0,64	$0,16 + 0,04 = 0,2$	0,128	0,032

Für den Erwartungswert erhält man:

$$\begin{aligned}\mu(X) &= \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(X = x_i) \\ &= 0 \cdot 0,64 + 5 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,128 + 35 \cdot 0,032 \\ &= 0 + 1 + 3,84 + 1,12 \\ &= 5,96\end{aligned}$$

Es gibt noch einen anderen Zug, der direkt, ohne Umsteigen, ans Ziel fährt. Dieser braucht laut Fahrplan 5 Minuten länger als die Umsteigebeziehung und ist erfahrungsgemäß zwar auch in 80 % seiner Fahrten pünktlich, dafür verspäten sich 10 % der Züge um 5 Minuten und 10 % sogar um 10 Minuten.

Für den Vergleich mit der Umsteigebeziehung bedeutet dies für den Direktzug: In 80 % der Fahrten braucht er 5 Minuten länger, in 10 % 10 Minuten länger, in 10 % 15 Minuten länger.

Der Erwartungswert der Direktverbindung ist dann

$$\mu(Y) = 5 \cdot 0,8 + 10 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,1 = 4 + 1 + 1,5 = 6,5.$$

Mit der Umsteigebeziehung kommt man erwartungsgemäß $6,5 - 5,96 = 0,54$ Minuten früher an. Damit schneidet die Direktverbindung im Erwartungswert schlechter ab.

Wir berechnen jetzt noch die Varianzen bzw. Standardabweichungen für die beiden Verbindungen. Diese zeigen an, wie weit verstreut die einzelnen Werte der Zufallsgrößen von ihren Erwartungswerten sind.