

Grundlegende Kombinatorik – Variationen, Kombinationen und Permutationen

Ein Beitrag von Dr. Jürgen Franke



Wikimedia Commons [gemeinfrei gestellt]

In diesem Beitrag erfahren die Jugendlichen, wie man komplexe Probleme aus der Technik und dem Alltag mathematisch modellieren kann. Dabei lernen Sie die vier Urnenmodelle kennen und unterscheiden zwischen Variationen, Kombinationen und Permutationen. Der interdisziplinäre Unterricht stärkt die Motivation der Schülerinnen und Schüler und zeigt auf, welche enorm wichtige Rolle die Kombinatorik in technologischen Fragestellungen spielt.

Grundlegende Kombinatorik – Variationen, Kombinationen und Permutationen

Oberstufe (grundlegend)

von Dr. Jürgen Franke

Hinweise	1
M1 Ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge	2
M2 Ziehen ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge	6
M3 Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge	9
M4 Permutationen mit mehreren gleichartigen Elementen	12
M5 Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge	15
Lösungen	18

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die vier Urnenmodelle kennen, unterscheiden die Begrifflichkeiten der Kombinatorik und wenden ihr neues Wissen an anschaulichen Aufgaben aus dem Alltag und der Technik an. Die Jugendlichen erkennen mit diesem Beitrag, dass scheinbar einfache Probleme, wie das Verarbeiten eines Buchstabens mit dem Computer, bereits Wissen aus der Kombinatorik verlangen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Ziehen mit Zurücklegen mit Reihenfolge	M1	AB
Ziehen ohne Zurücklegen mit Reihenfolge	M2	AB
Ziehen ohne Zurücklegen ohne Reihenfolge	M3	AB
Permutationen mit mehreren gleichartigen Elementen	M4	AB
Ziehen mit Zurücklegen ohne Reihenfolge	M5	AB

Kompetenzprofil:

- Inhalt:** Variationen, Kombinationen, Permutationen, Ziehen mit und ohne Zurücklegen bzw. mit und ohne Reihenfolge, Permutationen gleichartiger Elemente
- Medien:** TR/CAS
- Kompetenzen:** Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Aufgabe 1

Es sollen 10 Ziffern, 26 Buchstaben, Punkt, Komma und Leerzeichen, durch einen Code aus Dualzahlen dargestellt werden können. Wie viele Stellen müssen Dualzahlen dafür mindestens haben? Berechnen Sie.

Ziehen mit Zurücklegen

Übertragen wir die Überlegungen, welche wir bei dem Münzwurf gemacht haben, auf Würfel. Anstatt zu würfeln, geben wir in eine Urne sechs gekennzeichnete Kugeln, ziehen jeweils eine davon und legen sie wieder zurück. In der Urne sind somit vor jedem Zug die Kugeln „1“, „2“, „3“, „4“, „5“ und „6“, also $n = 6$.

Beim ersten Zug gibt es sechs Ergebnisse. Der zweite Zug führt für jedes der ersten sechs Ergebnisse zu sechs weiteren, womit also bereits insgesamt 36 Ergebnisse existieren. Beim dritten Wurf versechsfacht sich die Anzahl der Ergebnisse wieder, usw. Damit berechnet sich die Anzahl der Ergebnisse zu

$$Z_{\text{Würfel}} = 6^k.$$

Allgemein stellen wir fest: Bei k Zügen aus einer Urne mit n Kugeln, wobei nach jedem Zug die Kugel zurückgelegt wird, gibt es

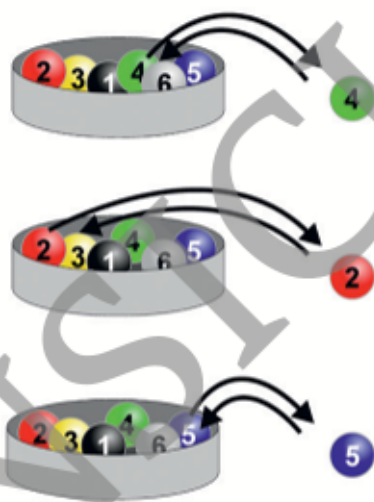
$$Z = n^k$$

Variationen. Die Wahrscheinlichkeit, genau eine bestimmte davon zufällig zu erhalten, ist somit

$$P = \frac{1}{Z} = \frac{1}{n^k}.$$

Anzahl der Variationen (also **mit Reihenfolge**) für Ziehen **mit Zurücklegen**:

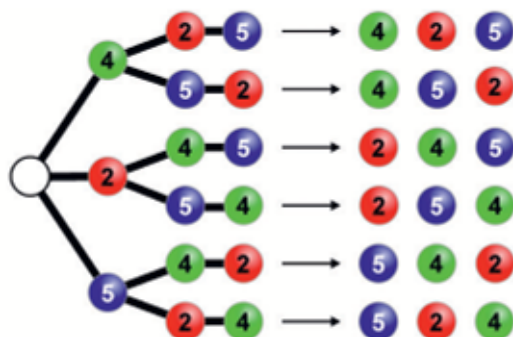
$$Z = n^k$$



Grafik: Dr. Jürgen Franke

Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge

M3



Grafik: Dr. Jürgen Franke

Nun könnte man noch überlegen, wie viele Kombinationen sich ergeben, wenn die Reihenfolge der gezogenen Kugeln keine Rolle spielt. Betrachten wir das Beispiel in der gegebenen Abbildung. Dort wurden die Kugeln ohne Zurücklegen in der Reihenfolge „4“, „2“ und „5“ im ersten Pfad gezogen. Auf dem Tisch liegen also drei verschiedene Kugeln neben der Urne. Wenn wir die Reihenfolge nicht beachten, ist z. B. „2“, „4“ und „5“ gleichbedeutend mit „4“, „2“ und „5“.

Wir können also die drei Kugeln beliebig vertauschen, all diese Anordnungen wären gleichbedeutend. Die Anordnungen, die durch Vertauschen der Kugeln entstehen, nennt man auch Permutationen. Anhand eines Baumdiagramms können wir das bei den drei Kugeln noch gut darstellen und sehen, dass sechs Permutationen möglich sind. Wir könnten auch die drei Kugeln allein in eine weitere Urne geben und alle daraus ziehen. Dann wären, wie schon zuvor gezeigt, $3! = 6$ Permutationen möglich.

Bei der ursprünglichen Aufgabenstellung sollten alle Kombinationen beim Ziehen von drei Kugeln ohne Zurücklegen aus einer Urne mit anfangs sechs Kugeln ohne Beachtung der Reihenfolge ermittelt werden. Wir nehmen also die Anzahl Variationen (mit Reihenfolge) und dividieren durch die Anzahl an Permutationen, die mit den gezogenen drei Kugeln möglich ist, da ja jetzt all diese Permutationen zusammen ein Ergebnis darstellen sollen.