

### A.3.7

#### Zufallsexperimente – Vermischte Aufgaben

## Würfeln mit Oktaeder und Tetraeder

Günther Weber



© Günther Weber

Als Spielwürfel werden überwiegend sechsseitige Würfel (Hexaeder), dessen Seitenflächen mit einem bis sechs Punkten beschriftet sind, genutzt. Im vorliegenden Material untersuchen Ihre Schülerinnen und Schüler das Würfeln mit einem Oktaeder sowie das Würfeln mit einem Oktaeder und einem bzw. zwei Tetraedern. Durch das zusätzliche Werfen einer Münze werden die gewürfelten Punkte gewichtet. Die Lernenden bestimmen hierzu (bedingte) Wahrscheinlichkeiten durch das Zeichnen von Baumdiagrammen bzw. durch Anwenden der Binomialverteilung. Ebenso berechnen sie den Erwartungswert und überprüfen, ob ein Spiel mit Tetraeder und Oktaeder fair ist.

---

## KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe:</b>	10/11/12/13
<b>Dauer:</b>	6–8 Unterrichtsstunden
<b>Kompetenzen:</b>	Mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz, Textkompetenz, Umgang mit Texten und Medien
<b>Methoden:</b>	Auswertung, Computer- und Softwareeinsatz, Datenauswertung, Übung
<b>Materialart:</b>	Excel, Statistik
<b>Inhalt:</b>	Laplace-Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, „3-mal mindestens“-Aufgabe, Binomialverteilung, Erwartungswert

---

## Didaktisch-methodische Hinweise

### Lernvoraussetzungen

Ihre Klasse kennt verkürzte Baumdiagramme und die Pfadregeln. Die Lernenden berechnen (bedingte) Wahrscheinlichkeiten ohne Schwierigkeiten mit unterschiedlichen Lösungsverfahren. Die Schülerinnen und Schüler können mit Zufallsvariablen umgehen und die Binomialverteilung anwenden. Idealerweise sind ausreichende Kenntnisse eines Tabellenkalkulationsprogramms, z. B. Excel, vorhanden; die halbabsolute Adressierung in den Formeln muss nicht bekannt sein und kann den Jugendlichen während des Unterrichts gezeigt werden.

### Lehrplanbezug

In den Kernlernplänen NRW ([https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/Klp\\_SII/m/KLP\\_GOST\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/Klp_SII/m/KLP_GOST_Mathematik.pdf), aufgerufen am 15.07.2024) sind im Inhaltsfeld „Stochastik“ unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,

- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- verwenden Bernoulli-Ketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente,
- stellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf und führen Erwartungswertbetrachtungen durch.

### Hinweise zu den Materialien

Bei **Aufgabe 1a)** bestimmen Ihre Schülerinnen und Schüler die Wahrscheinlichkeiten mithilfe eines Baumdiagramms oder mithilfe einer Tabelle bzw. die bedingten Wahrscheinlichkeiten mithilfe einer Formel oder einer Tabelle. Teilen Sie Ihre Lerngruppe in zwei Teilgruppen auf und lassen Sie die Aufgaben von jeder Lerngruppe mit einem der beiden Rechenwege bearbeiten. Anschließend vergleichen Sie die Rechenwege. Gleiches kann bei **Aufgabe 2c)** geschehen. Die rechnerische Lösung **Aufgabe 2d)** kann zur Differenzierung nach Schnelligkeit bzw. zur Differenzierung nach Leistungsstärke genutzt werden. Sofern Tetraeder und Oktaeder vorliegen, kann vor der Bearbeitung von **Aufgabe 3b)** das Spiel einige Male per Hand gespielt werden. Sind die Lernenden nicht ganz so vertraut mit einer Tabellenkalkulation, so besprechen Sie den Aufbau der Tabelle. Wichtig ist es, dass Sie Ihre Schülerinnen und Schüler daran erinnern, dass durch das Drücken der F9-Taste eine Neuberechnung der Zufallszahlen stattfindet, und erklären, dass der Aufbau der Tabelle dem Baumdiagramm entspricht. Bei **Aufgabe 3d)** klären Sie im Unterrichtsgespräch, warum das Zeichnen eines Baumdiagramms hier unübersichtlich ist. Gibt es nach dem Verteilen von **M 2** Schwierigkeiten mit den Tabelleninhalten, so weisen Sie darauf hin, dass in der Tabelle die verschiedenen Möglichkeiten des Baumdiagramms enthalten sind.

## Auf einen Blick

---

### Oktaeder und Tetraeder

**M 1**            Aufgaben

**M 2**            Spiel mit 5 Würfeln

**Benötigt:**     Tabellenkalkulationsprogramm  
               GTR/CAS

### Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.



leichtes Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

## Aufgaben

M 1

Ein Oktaeder hat acht kongruente Seitenflächen, die mit den Zahlen 1 bis 8 beschriftet sind. Wirft man bei einem Würfelspiel einen Oktaeder, so ist die Zahl gewürfelt, die auf der oberen Dreiecksfläche steht. Im nebenstehenden Oktaeder wurde also die 5 gewürfelt.

Ein Tetraeder hat vier kongruente Seitenflächen; die Kanten des Tetraeders sind mit 1, 2, 3 oder 4 beschriftet. Wirft man bei einem Würfelspiel einen Tetraeder, so ist die Zahl gewürfelt, die auf den sichtbaren Bodenkanten steht. Im nebenstehenden Tetraeder wurde also die 4 gewürfelt.



Fotos: Günther Weber

1. Ein Tetraeder und ein Oktaeder werden geworfen.
  - a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
    - E1: Die Oktaeder- und die Tetraederzahl sind gleich.
    - E2: Die Oktaederzahl ist kleiner als die Tetraederzahl.
    - E3: Die Oktaederzahl ist ein Vielfaches der Tetraederzahl.
    - E4: Die Summe der beiden Zahlen ist gerade.
    - E5: Die Summe der beiden Zahlen ist mindestens 10.
    - E6: Der Abstand der beiden Zahlen ist höchstens 2.
    - E7: Für den Quotient gilt:  $\frac{1}{3} < \frac{\text{Tetraederzahl}}{\text{Oktaederzahl}} < 1$ .
    - E8: Die Tetraederzahl eine 4 ist, wenn die Summe der beiden Zahlen mindestens 9 beträgt.
    - E9: Die Oktaederzahl kleiner oder gleich 2 ist, wenn das Produkt der beiden Zahlen höchstes 10 ist.
  - b) Bestimmen Sie die minimale Anzahl von gleichzeitigen Würfeln mit Oktaeder und Tetraeder, die notwendig ist, damit mit mindestens 99 %-iger Sicherheit das Produkt der beiden Zahlen mindestens einmal größer als 20 ist.
  - c) Es wird 10-mal gleichzeitig ein Oktaeder und ein Tetraeder geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
    - E10: Bei höchstens 4 Würfeln ist die Summe der beiden Zahlen eine Primzahl und das Produkt der beiden Zahlen größer als 16.
    - E11: Bei mindestens 4 Würfeln ist die Oktaederzahl gerade oder die Tetraederzahl ungerade.
    - E12: Die Anzahl der Würfeln, bei denen der Abstand zwischen der Oktaederzahl und der Tetraederzahl eine Primzahl ist, ist größer als 3 und höchstens 8.