

## R.22

### Anwendungsaufgaben

## Elfmeterschießen und Stochastik

Günther Weber



© RAABE 2025

Connect Images / Connect Images / Getty Images Plus

Elfmeter während eines Fußballspiels sind oft spielentscheidende Situationen. Muss jedoch z. B. bei Pokalspielen ein Sieger ermittelt werden und steht dieser nach der Verlängerung noch nicht fest, so findet ein Elfmeterschießen statt, bis der Sieger feststeht. In den Aufgaben werten Ihre Schülerinnen und Schüler die geschossenen Elfmeter der Saison 23/24 der 1. Bundesliga mithilfe einer Achtfelder-Tafel aus. Darauf aufbauend definieren die Jugendlichen Ereignisse und bestimmen ihre (bedingten) Wahrscheinlichkeiten. Sie benutzen hierzu Baumdiagramme sowie die Binomial- bzw. hypergeometrische Verteilung. Mit der Trefferquote für Elfmeter aus der Saison 23/24 wird zudem ein „verrücktes“ Elfmeterschießen mit insgesamt 34 geschossenen Elfmeter untersucht.

---

## KOMPETENZPROFIL

<b>Klassenstufe:</b>	11/12/13
<b>Dauer:</b>	3–4 Unterrichtsstunden
<b>Kompetenzen:</b>	Probleme mathematisch lösen, mathematisch modellieren, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
<b>Methoden:</b>	Übung
<b>Materialart</b>	Differenzierungsmaterial
<b>Thematische Bereiche:</b>	Baumdiagramm, Pfadmultiplikations- und Pfadadditionsregel, (bedingte) Wahrscheinlichkeit, hypergeometrische Verteilung, Binomialverteilung

---

## Fachliche Hinweise

Ihre Klasse kennt verkürzte Baumdiagramme und die Pfadregeln. Die Lernenden berechnen ohne Schwierigkeiten Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten mit unterschiedlichen Lösungsverfahren. Die Achtfelder-Tafel muss nicht bekannt sein, der Aufbau der Tafel wird dann durch Hinweis auf die Vierfelder-Tafel im Unterricht geklärt. Gleiches gilt für die hypergeometrische Verteilung.

## Lehrplanbezug

In den Kernlernplänen NRW ([https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp\\_SII/m/KLP\\_GOSt\\_Mathematik.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_SII/m/KLP_GOSt_Mathematik.pdf), aufgerufen am 9.10.2024) sind im Inhaltsfeld „Stochastik“ unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- deuten Alltagssituationen als Zufallsexperimente,
- verwenden Urnenmodelle zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente und ermitteln Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Pfadregeln,
- modellieren Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen und Vier- oder Mehrfeldertafeln,
- bestimmen bedingte Wahrscheinlichkeiten,
- verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufallsexperimente,
- erklären die Binomialverteilung und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen.

## Didaktisch-methodische Hinweise

Da es in jeder Lerngruppe wahrscheinlich Schüler und Schülerinnen gibt, die Fußball spielen, können diese kurz die Begriffe Elfmeter bzw. Elfmeterschießen erklären. Sind die Lernenden mit der Achtfelder-Tafel nicht so vertraut, so kann der Aufbau der Tafel gemeinsam besprochen werden. Nach der Bearbeitung von Aufgabe 1) sollten die Zahlen der Achtfelder-Tafel verglichen werden, da in den Folgeaufgaben auf diese zugegriffen wird. Vor der Bearbeitung von Aufgabe 7) wird evtl. noch einmal der Begriff und die Berechnung einer  $\sigma$ -Umgebung wiederholt. Vor der Bearbeitung von Aufgabe 8c) kann man die Jugendlichen schätzen lassen.

## Auf einen Blick

### Elfmeterschießen und Stochastik

M 1 Aufgaben

Benötigt:  evtl. Internet

### Erklärung zu den Symbolen



Dieses Symbol markiert differenziertes Material. Wenn nicht anders ausgewiesen, befinden sich die Materialien auf mittlerem Niveau.



leichtes Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

## M 1 Aufgaben

Näheres zum Strafstoß oder Elfmeter siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Strafsto%C3%9F> (abgerufen am 11.03.2025)

In der 1. Bundesliga zeigten die Schiedsrichter\*innen in der Saison 23/24 insgesamt 101-mal auf den Elfmeterpunkt. Wertet man die geschossenen Elfmeter nach den Kriterien Elfmeter verwandelt/verschossen, Elfmeter in der 1. Halbzeit / 2. Halbzeit gegeben bzw. Elfmeter von einem Stürmer/"Nichtstürmer" geschossen aus, so können die Ergebnisse der Auswertung in eine Achtfelder-Tafel eingetragen werden.

Auf der Website

<https://www.transfermarkt.de/bundesliga/elfmeterstatistik/wettbewerb/L1/plus/1?saizonid=2023> (abgerufen am 11.03.2025)

findet man zum Elfmeter z. B. folgenden Eintrag:

ELFMETERSTATISTIK: GETROFFEN					
Spieltag	Verein/Schütze	Verein/Torhüter	Stand	Minute	Endstand
1	FC Augsburg Sven Michel Linksaußen	Borussia Mönchengladbach Jonas Omlin	3 : 3	45	4 : 4

Eingetragen wird dieser Elfmeter in der Achtfelder-Tafel somit bei Elfmeter verwandelt („Treffer“), Stürmer und Halbzeit 1 (abgekürzt mit T, S, 1)

- Einige Werte der Auswertung sind in der nachfolgenden Achtfelder-Tafel eingetragen.

	1	$\bar{1}$		
$\bar{T}$			$\bar{S}$	
	27		S	68
$\bar{T}$			$\bar{S}$	
	49			

### 8. Verrücktes Elfmeterschießen in der Qualifikation der Europa-League

In der 3. Runde der Europa-League-Qualifikation fand das Rückspiel Ajax Amsterdam gegen Panathinaikos Athen am Donnerstag, den 15.08.2024 statt. Nach dem 1 : 0 für Ajax im Hinspiel gewann Panathinaikos das Rückspiel 1 : 0, sodass das Spiel in die Verlängerung ging. In dieser fiel kein weiterer Treffer, sodass die Entscheidung im Elfmeterschießen herbeigeführt werden musste. Dieses gewinnt Ajax nach 34 geschossenen Elfmeter mit 13 : 12 verwandelten Elfmeter. Eine Anzahl von 34 geschossenen Elfmeter ist für einen UEFA-Wettbewerb ein Rekord.

#### Informationen zum Elfmeterschießen

Beim Elfmeterschießen werden je Mannschaft 5 Spieler bestimmt, die wechselweise von der Strafstoßmarke aus auf das Tor schießen. Es gewinnt diejenige Mannschaft, die von ihren fünf Elfmeter mehr verwandelt als die andere Mannschaft. Bei einem unentschiedenen Stand wird das Elfmeterschießen so lange um einen weiteren Schützen je Mannschaft verlängert, bis eine Entscheidung gefallen ist. Andererseits ist es aber auch möglich, dass das Elfmeterschießen vorzeitig endet, und zwar dann, wenn eine Mannschaft einen nicht mehr einholbaren Vorsprung erzielt hat. Vor dem Elfmeterschießen wird per Los festgelegt, wer das Elfmeterschießen beginnt.

ausführlichere Informationen siehe:

<http://de.wikipedia.org/wiki/Elfmeterschie%C3%9Fen> (abgerufen am 11.03.2025)

a)

- (1) Nach 5 geschossenen Elfmeter je Mannschaft stand es 4 : 4 (nur die verwandelten Elfmeter werden gezählt). Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten die es gibt, dass dieser Spielstand zustande kommt.
- (2) Panathinaikos beginnt das Elfmeterschießen, Mancini tritt an und verschießt. Bestimmen Sie erneut die Anzahl der Möglichkeiten die es gibt, dass ein Spielstand von 4 : 4 zustande kommt.

b) In der Verlängerung des Elfmeterschießens wurde der erste Elfmeter von beiden Mannschaften im Tor „versenkt“, anschließend kam es bei beiden Mannschaften zu zwei Fehlschüssen. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten für den weiteren Verlauf des Elfmeterschießens.

c)

- (1) Berechnen Sie mit der Trefferquote der 1. Bundesliga aus der Saison 23/24 (siehe Aufgabe 1c) die Wahrscheinlichkeit für das „Rekord“-Elfmeterschießen.
- (2) Vergleichen Sie die in Aufgabenteil (1) ermittelte Wahrscheinlichkeit mit der Wahrscheinlichkeit für „6 Richtige“ im Lotto.