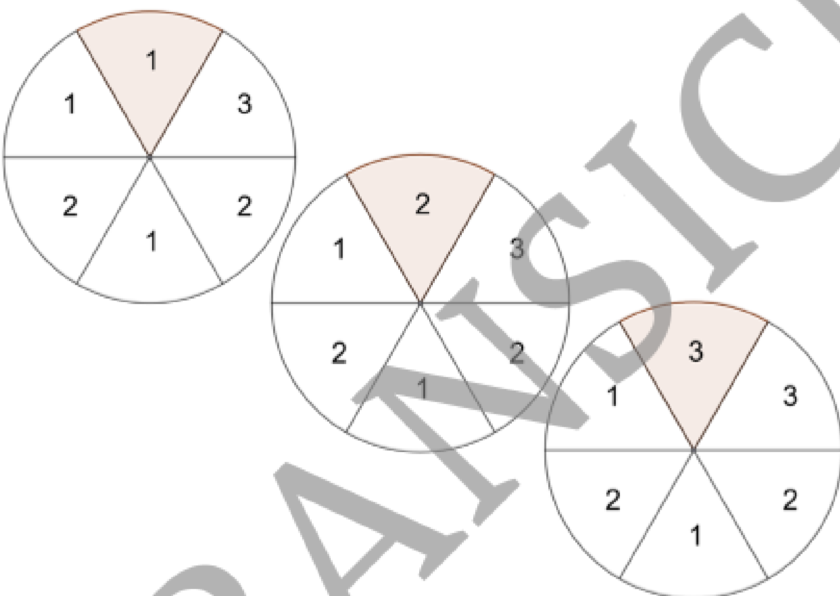
B.2.36

Wahrscheinlichkeiten mehrstufiger Zufallsexperimente

Glücksräder mit gleich großen Sektoren – Aufgaben aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Günther Weber



Günther Weber © RAABE

Die Lernenden benutzen drei fast gleiche Glücksräder zur Gewinnung der Zahlen 1, 2 und 3. Mithilfe dieser Zahlen werden Ereignisse definiert, deren (bedingte) Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden; in vielen Fällen werden hierzu (teils größere) Baumdiagramme erstellt. Ebenso lassen sich mit den „erdrehten" Zahlen weitere Aufgaben wie die Dreimal-mindestens-Aufgabe oder Spiele stellen. Ein Ereignis wird mithilfe einer Tabellenkalkulation simuliert und die erzielten relativen Häufigkeiten mit der berechneten Wahrscheinlichkeit verglichen. Werden die Glücksräder mit G1, G2 und G3 bezeichnet, so können die Zahlen auf den Glücksrädern angeben, welches Glücksrad als nächstes gedreht wird. Die Übergänge können dann mithilfe eines Übergangsdiagramms erfasst werden und die Berechnungen mithilfe einer Matrix erfolgen.

KOMPETENZPROFIL

Dauer:	4–5 Unterrichtsstunden
Kompetenzen:	Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit mathematischen Objekten umgehen (K5)
Methoden:	Diskussion, Computer- und Softwareeinsatz
Materialart:	Arbeitsblatt, Differenzierungsmaterial, Excel
Thematische Bereiche:	Baumdiagramme, Laplace-Wahrscheinlichkeit, bedingte Wahrscheinlichkeit, Bernoulli-Experiment, Dreimal-mindestens-Aufgabe, faires Spiel, Übergangsmatrix

Didaktisch-methodische Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Aus dem Bereich der Stochastik beherrschen die Lernenden das Zeichnen von Baumdiagrammen und die Pfadregeln. Ebenso sollten sie die Formel von Bernoulli kennen und anwenden können. Die Jugendlichen können die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei einem Zufallsversuch bestimmen; sie sind mit dem Erwartungswert und der Streuung einer Zufallsvariable vertraut und wissen, wann ein Spiel fair ist.

Lehrplanbezug:

In den Kernlernplänen NRW (https://lehrplannavigator.nrw.de/system/files/media/document/file/klp-entwurf_vb_sii_gost_mathematik_1.pdf, aufgerufen am 22.01.2026) sind im Inhaltsfeld „Stochastik" unter anderem folgende Kompetenzerwartungen aufgeführt:

Die Schülerinnen und Schüler ...

- erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen,
- bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen,

- verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen,
- beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mithilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
- lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
- erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung.

Anwendung im Unterricht:

Weisen Sie bei **Aufgabe 1d)** darauf hin, dass im Ereignis mindestens 5 steht, dass der Summenwert also auch 6 oder 7 sein kann. Die **Aufgaben 2b)** und **2c)** können arbeitsteilig in 3 Gruppen bearbeitet werden. Jede Teilgruppe bearbeitet ein Ereignis und stellt den Rechenweg und das Ergebnis den anderen Gruppen vor. Eine gruppenweise Bearbeitung ist auch bei **Aufgabe 3)** möglich. Die erste Gruppe bearbeitet dann Spiel 1, die andere Gruppe Spiel 2. Geben Sie bei **Aufgabe 4c)** den Hinweis, dass es übersichtlicher ist, wenn das Baumdiagramm in ein dreistufiges und ein zweistufiges Baumdiagramm aufgeteilt wird. Kommen in den Vorgaben für das Land noch Übergangsdiagramme und -Matrizen vor wie z.B. in Hessen, dann kann die Aufgabe sofort mit Matrizen bearbeitet werden. Ansonsten können Sie bei der Aufgabe den Hinweis geben, dass eine Berechnung mithilfe der Matrix schneller und übersichtlicher erfolgen kann. Evtl. führen Sie die Rechnung zur Veranschaulichung mit einem MMS vor.

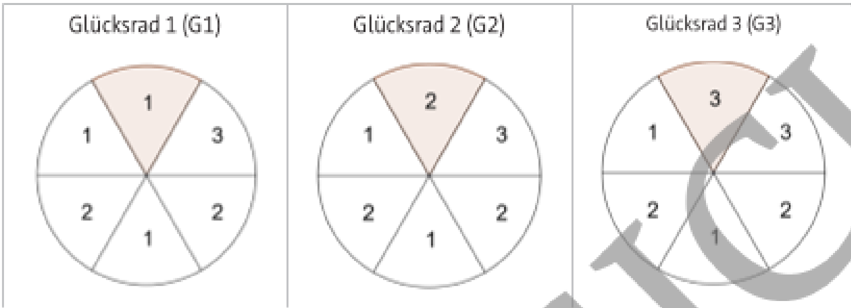
Die Schüler lernen:

die Pfadregeln zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten in zwei- bzw. mehrstufigen Zufallsexperimenten zu verwenden. Vergrößert sich die Anzahl der Laplace-Zufallsexperimente, so setzen die Jugendlichen die Formel von Bernoulli ein. Ebenso simulieren die Lernenden ein Zufallsexperiment und vergleichen ihre Ergebnisse mit der berechneten Wahrscheinlichkeit. Ebenfalls überprüfen sie, ob bzw. bei welchem Einsatz ein durchgeführtes Spiel fair ist.

Aufgaben

M 1

Drei Glücksräder sind jeweils in sechs gleich große Sektoren eingeteilt, in fünf der Sektoren sind die Zahlen bei allen drei Glücksrädern gleich. Im sechsten, farbig hervorgehobenen Sektor, steht bei Glücksrad 1 eine 1, bei Glücksrad 2 eine 2 und bei Glücksrad 3 eine 3.



Günther Weber © RAABE

1.

a) Das Glücksrad G1 wird sechsmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
E1: Die 2 wird genau viermal „erdreht".
E2: Die 3 wird höchstens einmal „erdreht".
E3: Es wird dreimal die 1, zweimal die 2 und einmal die 3 „erdreht".
E4: Es wird abwechselnd eine gerade und eine ungerade Zahl „erdreht".
E5: Die Summe der „erdrehten" Zahlen ist 8.

b) Bestimmen Sie, wie oft man das Glücksrad G1 drehen muss, damit man mit mindestens 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die 3 „erdreht" hat.

c) Das Glücksrad G1 wird sechsmal gedreht und die „erdrehten" Ziffern von links nach rechts nebeneinander geschrieben, sodass eine sechsstellige Zahl entsteht. Es sei E das Ereignis „Die sechsstellige Zahl ist größer als 211322".

(i) Führen Sie mithilfe der Datei *Sechsmal_Drehen_von_Glücksrad_1.xlsx* 10 000 (10 x 1000) Drehungen durch, tragen Sie die relative Häufigkeit für das Ereignis E in die Tabelle auf der nächsten Seite ein und bestimmen Sie den Mittelwert der relativen Häufigkeiten.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E sowie die prozentuale Abweichung des Mittelwertes aus Aufgabenteil (i) von der berechneten Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E .

3. Die drei Glücksräder sollen für ein Spiel eingesetzt werden:

   Spiel 1: Eines der Glücksräder wird zufällig ausgewählt und gedreht.
   Ist die „erdrehte" Zahl gleich der Nummer des Glücksrads, so wird nichts ausbezahlt, andernfalls wird der Betrag der „erdrehten" Zahl (in €) ausgezahlt.
   Berechnen Sie, bei welchem Einsatz das Spiel fair ist.

   Spiel 2: Eines der Glücksräder wird zufällig ausgewählt und zweimal gedreht.
   Wird die Nummer des Glücksrads zweimal „erdreht", so wird der dreifache Betrag der „erdrehten Zahl (in €) ausgezahlt.
   Wird die Nummer des Glücksrads einmal „erdreht, so wird der Betrag der „erdrehten" Zahl (in €) ausgezahlt.
   Der Einsatz für das Spiel beträgt 2 €. Überprüfen Sie, ob das Spiel fair ist.

4. Die „erdrehte" Zahl auf dem Glücksrad gibt an, welches Glücksrad als nächstes gedreht wird. Die 1. Drehung erfolgt mit Glücksrad 1.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass
   a) die dritte Drehung mit Glücksrad G3 erfolgt,
   b) die zweite und dritte Drehung mit dem gleichen Glücksrad erfolgt.
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die fünfte Drehung mit dem Glücksrad G1, G2 oder G3 erfolgt und bestimmen Sie das ganzzahlige Verhältnis $p(G1):p(G2):p(G3)$