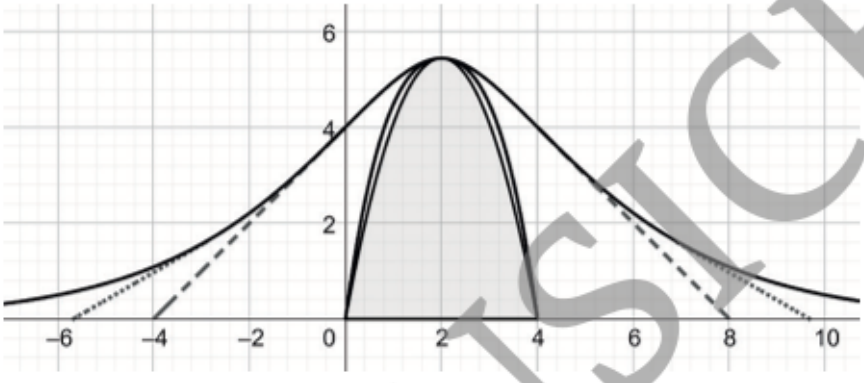
Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

Günther Weber



© *Günther Weber*

Funktionsuntersuchungen mit Eigenschaftsbestimmungen gehören zu den Standardaufgaben des Analysis-Unterrichts der Oberstufe. Nimmt man jedoch zum Graph einer Funktion noch z. B. den Graphen der Ableitungsfunktion oder den verschobenen bzw. gespiegelten Graphen der Funktion hinzu, so lassen sich dazwischen Dreiecke mit bestimmten Eigenschaften legen. Ebenso können Figuren zwischen die Graphen gelegt werden, sodass der Flächeninhalt maximal wird. Die Funktionsuntersuchung erweitert der Beitrag damit um Extremalwertaufgaben. Der Graph einer Exponentialfunktion und der gespiegelte bzw. verschobene Graph der Funktion bilden bei weiteren Aufgaben den Querschnitt von Körpern. Anwendungsaufgaben stellen bestimmte Anforderungen an diese Körper, welche die Lernenden lösen.

VORANSICHT

RAABE
KLASSE SCHULE

Extremwertprobleme und Anwendungen bei einer Exponentialfunktion

Oberstufe (grundlegendes/weiterführendes Niveau)

Günther Weber

Hinweise	**1**
Aufgaben	3
Lösung	7

Die Schüler und Schülerinnen lernen:

durch Ableitung einer Exponentialfunktion oder Spiegelung bzw. Verschiebung ihres Graphen weitere Graphen zu bestimmen. Sie legen zwischen die Graphen ein Dreieck, welches abhängig von einer Parallelen zur y-Achse rechtwinklig oder gleichschenklig sein kann. Ebenso legen die Jugendlichen durch eine Parallele ein Dreieck, ein Rechteck oder ein Trapez fest, dessen Flächeninhalt maximal sein soll. Sie bestimmen dazu jeweils die Parallelengleichung. Rotiert der Graph der verschobenen Exponentialfunktion, so entsteht ein Rotationskörper, an dem die Lernenden Volumenberechnungen durchführen. Spiegelt man den Graph der Exponentialfunktion mit eingeschränktem Definitionsbereich vertikal an einer Achse parallel zur y-Achse, so entsteht ein Querschnitt mit dem Aussehen eines Dammes. Diesen Querschnitt nutzen die Schülerinnen und Schüler als Modellierung.

© RAABE 2022

VORANSICHT

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler können eine Funktionsuntersuchung durchführen und uneigentliche Integrale berechnen. Sie kennen die Formeln zur Berechnung der Länge einer Strecke bzw. des Flächeninhalts von Dreieck, Rechteck oder Trapez und nutzen diese zum Aufstellen der Zielfunktion bei einem Extremwertproblem. Die Lernenden führen Transformationen (Verschiebung, Spiegelung) auf dem Graphen einer Funktion durch und ermitteln eigenständig den zugehörigen Funktionsterm. Sie kennen die Bedingung (Produkt der Steigungen der Geraden, auf denen zwei Seiten liegen, ist gleich –1 bzw. Umkehrung des Satzes des Pythagoras) wann ein Dreieck rechtwinklig bzw. gleichschenklig ist und verwenden diese Bedingung zur Parameterbestimmung. Die Jugendlichen berechnen das Volumen von Rotationskörpern und bestimmen ohne Probleme Tangentengleichungen in einem Punkt des Graphen.

Im Allgemeinen sollten die Schülerinnen und Schüler sicher im Umgang mit Exponentialfunktionen sein und diese sowohl integrieren als auch differenzieren können. Von Vorteil ist es, wenn die Lernenden mit dem GTR/CAS-Rechner und GeoGebra geübt sind.

© RAABE 2022

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 10.01.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler …

- führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben"),
- wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an,
- wenden die Produktregel auf Verknüpfungen von ganzrationalen Funktionen an,

VORANSICHT

- bestimmen Integrale mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge,
- ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen,
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

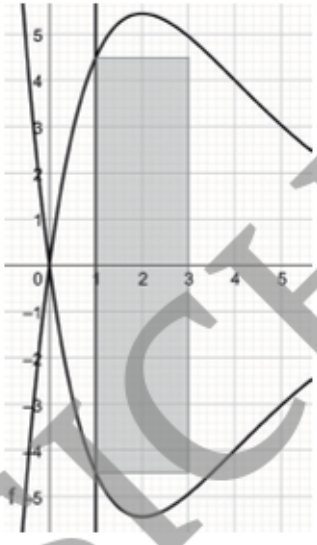
Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Bei **Aufgabe 1c)** können leistungsstarke Schülerinnen und Schüler die Stammfunktion mithilfe partieller Integration / Produktintegration herleiten und anschließend mithilfe der Stammfunktion den Wert des Integrals berechnen. Ebenso können leistungsstarke Klassenmitglieder einige Exponentialgleichungen per Hand lösen. **Aufgabe 2a)** bietet die Möglichkeit, die Aufgabe auf verschiedene Gruppen zu verteilen: Jede Gruppe überprüft für einen Eckpunkt, ob an diesem Eckpunkt ein rechter Winkel vorliegen kann. Eine weitere Differenzierung bei dieser Aufgabe können Sie dahingehend erreichen, dass verschiedene Lösungswege zur Bearbeitung herangezogen werden. Die Gesamtaufgabe enthält einige Extremwertprobleme. Nachdem die Zielfunktion aufgestellt worden ist, kann die Lösung der einzelnen Aufgaben auf verschiedene Gruppen aufgeteilt werden. Die Lösung wird dann anschließend im Unterrichtsgespräch vorgestellt. Eine Differenzierung nach Schnelligkeit schaffen Sie dadurch, dass nur die schnelleren Jugendlichen überprüfen, ob ein Randextremum vorliegt. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen sollten Sie die Lösung von **Aufgabe 3e)** auch mit dem GTR/CAS zulassen oder die Aufgabe in der Lerngruppe zusammen lösen lassen. Vor der Bearbeitung der **Aufgabenteile 5e)** und **f)** wiederholen Sie den Begriff knickfrei, oder falls er den Schülerinnen und Schülern bisher unbekannt ist, im Unterrichtsgespräch evtl. mit Skizzen an der Tafel klären, was knickfrei bedeutet (An den „Nahtstellen" haben die Teilfunktionen gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung). Eine Veranschaulichung bzw. Kontrolle der Lösungen kann mithilfe von GeoGebra geschehen. Die Aufgaben beinhalten eine Vielzahl von Aufgabenstellungen, wie sie auch im Abitur vorkommen können. Sie eignen sich daher zur Vorbereitung auf das Abitur sehr gut.

© RAABE 2022

VORANSICHT

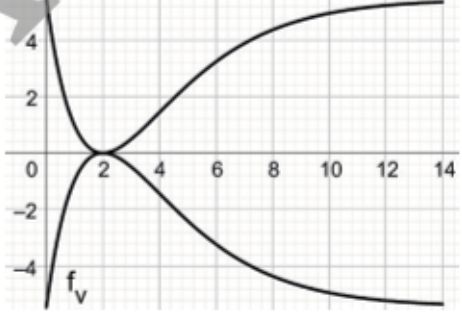
d) Die Gerade mit der Gleichung $x = k,\ k > 0$ schneidet die Graphen der Funktionen f bzw. f_s jeweils in einem Punkt. Die Strecke zwischen diesen beiden Schnittpunkten und eine 2 LE lange Strecke bilden ein Rechteck (siehe Abbildung), das **zwischen** den Graphen der Funktionen f und f_s liegt. Bestimmen Sie k so, dass das Rechteck maximalen Flächeninhalt hat.



e) Die Gerade mit der Gleichung $x = k,\ k > 0$ schneidet die Graphen der Funktionen f bzw. f_s jeweils in einem Punkt. Die Strecke zwischen den Schnittpunkten ist die Grundseite eines symmetrischen Trapezes mit der Höhe 2 LE, das maximalen Flächeninhalt annehmen soll.
Zeigen Sie, dass $A(k) = 2 \cdot e^{-0{,}5k+1} \cdot \left[k \cdot (e+1) + 2\right]$, $k > 0$ eine mögliche Zielfunktion des Extremwertproblems ist. Zeigen Sie ebenso, dass der maximale Flächeninhalt des Trapezes $4 \cdot (e+1) + e^{\frac{1}{e+1}}$ [FE] beträgt.

4. Der Graph der Funktion f wird so verschoben, dass der Hochpunkt des Graphen von f die x-Achse berührt; die zugehörige Funktion lautet f_v. Der Definitionsbereich der Funktion f_v ist [0; 14].

a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Funktion f_v an.
Der Graph der Funktion f_v wird an der x-Achse gespiegelt. Der Graph der Funktion f_v und der gespiegelte Graph bilden den Querschnitt (des Inneren) eines Kelchglases $\left(1\,\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{cm}\right)$.



© RAABE 2022

VORANSICHT