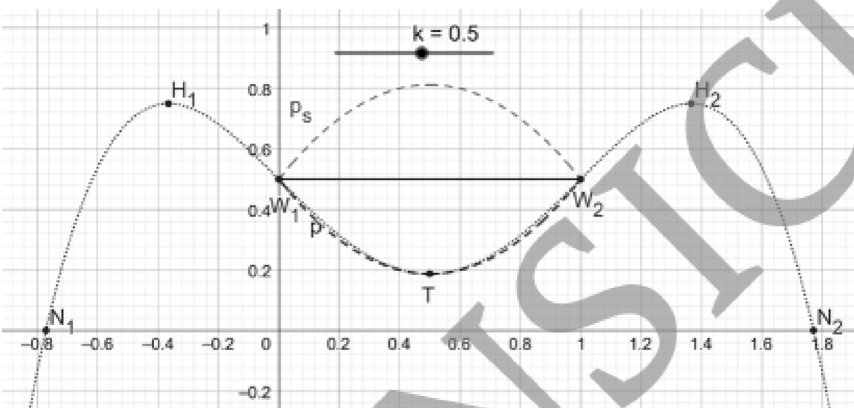
Untersuchungen an einer ganzrationalen Funktionenschar

Ein Beitrag von Günther Weber



© Günther Weber

In diesem Beitrag erkennen die Jugendlichen, dass sie Funktionsterme geschickt umformen können, sodass sie Extrempunkte bzw. Nullstellen einfach bestimmen können, für die sie sonst einen GTR/CAS benötigt hätten. Bei der Funktionenschar werden Eigenschaften wie Flächeninhalt oder Rechtwinkligkeit eines Dreiecks vorgegeben. Die Lernenden bestimmen daraufhin die zugehörigen Parameter. Diese bestimmen sie ebenso bei Extremalwertaufgaben. Im Weiteren finden die Schülerinnen und Schüler eine Parabel, die in einem Intervall den Graph einer ganzrationalen Funktion annähert. Die Parabel rotiert um eine Strecke und die Lernenden berechnen abschließend das Volumen des Rotationskörpers.

RAABE, KLASSE SCHULE

Untersuchungen an einer ganzrationalen Funktionenschar

Oberstufe (Niveau grundlegend/vertiefend)

Günther Weber

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

den Parameter k einer Funktionenschar so zu bestimmen, dass der Graph der zugehörigen Funktion achsensymmetrisch ist. Des Weiteren bestimmen sie die Parameter so, dass gewisse Eigenschaften (minimale Länge einer Strecke, vorgegebener Flächeninhalt eines Dreiecks, Rechtwinkligkeit eines Dreiecks) erfüllt sind. Die Jugendlichen zeigen zudem, dass der Graph der Funktionenschar genau zwei Wendepunkte hat, und stellen die Gleichung von Wendetangenten und Normalen auf. Die Lernenden erfahren, dass man den Funktionsterm der ganzrationalen Funktion umformen kann, sodass anschließend Extrempunkte und Nullstellen auch ohne GTR/CAS bestimmt werden können. Sie nähern den Graphen einer ganzrationalen Funktion in einem vorgegebenen Intervall durch eine Parabel an und berechnen das Volumen des Rotationskörpers, wenn der Graph um eine Strecke rotiert.

Hinweise

Lernvoraussetzungen:

Ihre Schülerinnen und Schüler können Eigenschaften von Graphen zum Bestimmen von Parametern nutzen. Funktionsuntersuchungen, auch bei Funktionenscharen, bereiten ihnen keine Schwierigkeiten. Die Lernenden kennen die Formeln zur Berechnung des Flächeninhalts von Dreieck und der Länge einer Strecke. Sie können die Tangentengleichung in einem Punkt des Graphen sowie die zugehörige Normale bestimmen. Der Begriff der Ortslinie ist bekannt und die Gleichung der Ortslinie kann hergeleitet werden. Die Jugendlichen können mit vorgegebenen Punkten eine Parabelgleichungen aufstellen und sie berechnen das Volumen von Rotationskörpern.

Günstig ist es, wenn die Schülerinnen und Schüler das Verfahren der Substitution kennen.

Lehrplanbezug:

Im Kernlernplan

https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf

(aufgerufen am 04.03.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen

Die Schülerinnen und Schüler …

- lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern oder Substituieren auf lineare und quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne digitale Hilfsmittel,
- verwenden das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionen
- verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von innermathematischen Problemen,
- interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen,
- verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrempunkten,
- bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben"),

- wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an,
- bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mithilfe von bestimmten Integralen.

Zudem nutzen die Lernenden mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge, um Sachverhalte zu veranschaulichen bzw. Ergebnisse zu kontrollieren.

Methodisch-didaktische Anmerkungen:

Vor der Bearbeitung der einzelnen Aufgaben, spätestens aber vor der Bearbeitung von Aufgabe 3 weisen Sie die Schülerinnen und Schüler darauf hin, die Operatoren genau zu beachten. So soll bei Aufgabe 3b die Kettenregel auf den umgeformten Funktionsterm angewandt werden. Eine Bestimmung mithilfe des GTR/CAS ist damit nicht möglich. Gleiches gilt für Aufgabenteil 3c.

Bei Aufgabe 1 veranschaulichen Sie bei leistungsschwächeren Lerngruppen den Sachverhalt. Die Veranschaulichung ersetzt aber keine rechnerische Lösung.

Gleiches gilt auch bei Aufgabe 2. Bei Aufgabe 2a können als Differenzierung leistungsstarke Schülerinnen und Schüler nachweisen, dass beim Wendepunkt W_2 kein rechter Winkel vorkommen kann. Als Hinweis können Sie hier noch den Satz des Thales geben.

Ist den Schülerinnen und Schülern der Koeffizientenvergleich nicht bekannt, geben Sie vor der Bearbeitung von Aufgabe 3 das Informationsblatt M1 heraus und besprechen Sie die Beispiele. Bei leistungsschwächeren Lerngruppen nehmen Sie noch weitere Beispiele hinzu. Leistungsstarke Jugendliche können eine Stammfunktion der Exponentialfunktion durch zweifache partielle Integration (Produktintegration) herleiten. Stellen Sie diese Lösung vor, so sollten alle die Schnelligkeit des Verfahrens des Koeffizientenvergleichs erkennen.

Informationsblatt Koeffizientenvergleich M1

Der Koeffizientenvergleich ist ein Verfahren für den Vergleich zweier Polynome gleichen Grades. Damit die Polynome gleich sind, müssen zwangsläufig ihre jeweiligen Koeffizienten gleich sein. Ist

$p_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$ und

$p_2(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0 x^0$, so sind die Polynome gleich, falls

$a_n = b_n,\ a_{n-1} = b_{n-1},\ \dots\ a_1 = b_1,\ a_0 = b_0$.

Da auch die Umkehrung gilt, kann man bei unbekannten Koeffizienten die Koeffizienten aus den sich ergebenden Gleichungen bestimmen. Vergleicht man zwei Polynome, von denen ein Polynom unbekannte, das andere Polynom bekannte Koeffizienten hat, so führt ein Vergleich zu einem linearen Gleichungssystem. Aus einer Gleichung mit mehreren Variablen wird damit ein Gleichungssystem, in dem die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Variablen ist.

Beispiel 1:

$p_1(x) = -4x + 1$ und $p_2(x) = a \cdot (x-3) + 5b = a \cdot x^1 + (-3a + 5b) \cdot x^0$

$p_1(x) = -4 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0$

$p_2(x) = a \cdot (x-3) + 5b = a \cdot x^1 + (-3a + 5b) \cdot x^0$

Aus dem Vergleich entstehen die Gleichungen

I $a = -4$

II $-3a + 5b = 1 \quad \Rightarrow 12 + 5b = 1 \quad \Leftrightarrow b = -2{,}2$

Somit ist $p_2(x) = -4 \cdot (x-3) - 11$

Beispiel 2:

Eine Stammfunktion zur Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^x$ hat die allgemeine Form

$F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x + k$

$F'(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x + (2ax + b) \cdot e^x = (ax^2 + (2a+b)x + (b+c)) \cdot e^x$

Ein Vergleich der Koeffizienten mit $f(x) = (1x^2 + 0x + 0) \cdot e^x$ ergibt das Gleichungssystem

I $a = 1$

II $2a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -2a = -2$

III $b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b = 2$

Eine Stammfunktion lautet: $F(x) = (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x + k$