Stammfunktionen, Flächeninhalte, wahre und falsche Aussagen – Übungstests aus Analysis

Alfred Müller

Ob als Leistungsüberprüfung oder Abiturvorbereitung, zur Wiederholung oder als Hausübung: Sechs Übungsblätter bieten Ihren Schülerinnen und Schülern eine breite Auswahl an Aufgaben aus dem Gebiet der Analysis. Die Themen reichen dabei von der Bestimmung von Stammfunktionen oder Kurvendiskussionen bei rationalen Funktionen, Exponential- oder Logarithmusfunktionen bis hin zu Flächen- und Winkelbestimmungen. Ebenso müssen die Lernenden Überlegungen zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit anstellen und sich bei einer Reihe von Aussagen die Frage stellen, welche davon wahr und welche falsch sind.

Für realistische Testbedingungen sorgen dabei die Angabe einer Bearbeitungszeit sowie ein Bewertungsschlüssel.

RAABE, KLASSE SCHULE

Stammfunktionen, Flächeninhalte, wahre und falsche Aussagen – Übungstests aus Analysis

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Anwendung ihres Wissens und ihres Könnens in abiturrelevanten Aufgaben. Die Zeitvorgaben ermöglichen auch die Simulation einer realen Prüfungssituation und fördern ihr Zeitmanagement.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt **BA** Bildanalyse

● einfaches Niveau ■ mittleres Niveau ▲ schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Ganzrationale Funktionen und Stammfunktionen	M1	AB
Parabeln und Stammfunktionen, wahre und falsche Aussagen	M2	AB
Rationale Funktionen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit	M3	AB
Gebrochenrationale Funktonen und Exponentialfunktion	M4	AB
Exponentialfunktionen	M5	AB
Logarithmus, Parabel und Kreis, Quadrat und Dreieck	M6	AB, BA

Differenzierung

Material	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Niveau	■	●	■	■	▲	■

Kompetenzprofil:

Inhalt: Integrieren, Differenzieren, Kurvendiskussion, Stammfunktion, ganzrationale Funktion, gebrochenrationale Funktion, Exponentialfunktion, Logarithmus, Definitionsbereich, Wertebereich, Flächenberechnung, Extremwertaufgabe, Winkelbestimmung, Funktionsgraph skizzieren

Medien: GTR/CAS

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Ganzrationale Funktionen und Stammfunktionen M1

1. Der Graph G_a einer ganzrationalen Funktion f_a dritten Grades hat im Ursprung $O(0|0)$ und im Punkt $P(4|a), a \in \mathbb{R}^+$ waagrechte Tangenten.
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y = f_a(x)$. [5 BE]
   b) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G_a mit der x-Achse sowie die Koordinaten des Wendepunktes. [5 BE]
   c) Zeichnen Sie den Graphen G_8 für a = 8 im Intervall $I = [-2; 6]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. [4 BE]
   d) Berechne Sie die Maßzahl A_a der Fläche, die der Graph G_a mit der x-Achse einschließt, in Abhängigkeit vom Parameter a. [4 BE]

2. Die quadratische Funktion g_a hat ihren Scheitel im Ursprung und verläuft durch den in Aufgabe 1) benutzten Punkt $P(4|a)$.
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y = g_a(x)$ und zeichnen Sie deren Graphen G_g für a = 8 im Intervall $I' = [-2; 4]$ in das obige Koordinatensystem. [4 BE]
   b) In welchem Verhältnis teilt der Graph G_g die Fläche A_a von Teilaufgabe 1c)? [5 BE]
   c) Die Gerade mit der Gleichung x = u (0 < u < 4) schneidet den Graphen G_a im Punkt Q und den Graphen G_g im Punkt B. Bestimmen Sie u so, dass die Länge $\ell = \left|\overline{QR}\right|$ maximal wird. Geben Sie außerdem ℓ_{max} in Abhängigkeit von a an. [5 BE]

3. $G: x \mapsto G(x)$ sei die Menge aller Stammfunktionen und $F: x \mapsto F(x) = \int_b^x g_8(t)dt$ sei die Menge aller Integralfunktionen zur Funktion g_8.
   a) Begründen Sie, dass es zu jeder Stammfunktion auch eine untere Grenze b so gibt, dass F und G übereinstimmen. [4 BE]
   b) Bestimmen Sie dann b so, dass die Integralfunktion F mit derjenigen Stammfunktion G übereinstimmt, deren Graph durch den Punkt $T(-6|-9)$ verläuft. [4 BE]

Arbeitszeit: 50 Minuten **Gesamt:** [40 BE]

M2 Parabeln und Stammfunktionen, wahre und falsche Aussagen

4. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch $f_a(x)=\frac{1}{4}x^2-ax, a\in\mathbb{R}$ und Graph G_a.

   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Schnittpunkte mit der x-Achse sowie die Koordinaten des Scheitels S_a. **[5 BE]**

   b) Berechnen Sie die Gleichung der Ortskurve für alle Scheitelpunkte S_a, wenn a alle zugelassenen Werte annimmt. **[2 BE]**

   c) Zeichnen Sie den Graphen G_1 für a = 1 im Intervall $I=[-1;5]$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. **[2 BE]**

   d) Die Gerade g geht durch den Scheitel S_1 und durch den Ursprung O. Unter welchem Winkel α schneidet die Gerade g den Graphen G_1 im Ursprung? **[4 BE]**

   e) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen G_1 im Punkt $P(3|y_P)$ sowie die Gleichung der Geraden n, die im Punkt P auf G_1 normal steht. **[4 BE]**

   f) Für eine Funktion h gilt: $h'(x)=f_1'(x)=\frac{1}{2}x-1$. Begründen Sie, warum die Funktionen h und f_1 nicht notwendigerweise übereinstimmen. Bestimmen Sie dann h so, dass $Q(-4|2)\in h$ gilt. **[3 BE]**

5. Gegeben ist die Funktion $f:x\mapsto f(x)=4x-x^2$ mit $D_f=\mathbb{R}$ und Graph G_f.

   a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f sowie den Inhalt A der Fläche, die der Graph G_f mit der x-Achse einschließt. **[5 BE]**

   b) $F:x\mapsto F(x)=\int_1^x f(t)dt$, $D_F=D_f$. Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung von F. **[3 BE]**

   c) $G:x\mapsto G(x)=\int f(x)dx$. Bestimmen Sie den Term $G(x)$. **[2 BE]**

6. Welche der folgenden Aussagen ist wahr (w), welche falsch (f)?
   a) Ein bestimmtes Integral ist eine Flächenmaßzahl.
   b) Ein unbestimmtes Integral ist ein bestimmtes Integral ohne Grenzen.
   c) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
   d) $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$
   e) $\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}x^4 - x^2\right)dx = 0$
   f) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^3 - x\right)dx = 0$
   g) F ist eine Integralfunktion zur Funktion f $\Rightarrow$ $G(x) = F(x) + c$ ist der Term einer Stammfunktion zur Funktion f.
   h) G ist eine Stammfunktion zur Funktion f $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$
   i) $F(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow$ F hat eine Nullstelle dort, wo f einen Extremwert besitzt.
   j) F und G sind zwei verschiedene Stammfunktionen zur Funktion f
   $\Rightarrow [F(x) - G(x)]' = c \neq 0$ **[10 BE]**

Arbeitszeit: 50 Minuten **Gesamt: [40 BE]**