

Exponentialfunktion, Sinus und Arkustangens – Anspruchsvolle Übungstests aus Analysis

Alfred Müller



© Rido Franz / iStock / Getty Images Plus

Sechs anspruchsvolle Übungstests aus Analysis stellen insbesondere auch leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler vor neue Herausforderungen. Sie befassen sich mit verschiedenen Funktionen und Funktionenscharen, darunter die Exponentialfunktion oder der Arkustangens. Insbesondere beim Integrieren ist an einigen Stellen Einfallsreichtum und gute Auffassungsgabe gefragt, um die passende Substitution zu finden und die partielle Integration richtig anzuwenden. Aber auch andere Themen wie das Finden von Schnittpunkten, Extremwerten oder Asymptoten sind Teil der Aufgaben.

Die Übungstests eignen sich auch als Vorbereitung auf das schriftliche Abitur. Die Zeitvorgabe sowie der Bewertungsschlüssel sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

Exponentialfunktion, Sinus und Arkustangens – Anspruchsvolle Übungstests aus Analysis

Alfred Müller

M1 Funktionenschar mit Exponentialfunktion	1
M2 Sinusfunktion mit Wurzelterm	2
M3 Gebrochenrationale Funktion und Arkussinus	3
M4 Exponentialfunktion, Parabel und Asymptote	4
M5 Funktionenschar und Arkustangens	5
M6 Gebrochenrationale Funktion und Arkustangens	6
Bewertungsschlüssel	7
Lösungen	8

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

die Anwendung ihres Wissens und ihres Könnens in abiturrelevanten Aufgaben. Die Zeitvorgaben ermöglichen auch die Simulation einer realen Prüfungssituation und fördern ihr Zeitmanagement.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt



einfaches Niveau



mittleres Niveau



schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Funktionenschar mit Exponentialfunktion	M1	AB
Sinusfunktion mit Wurzelterm	M2	AB
Gebrochenrationale Funktion und Arkussinus	M3	AB
Exponentialfunktion, Parabel und Asymptote	M4	AB
Funktionenschar und Arkustangens	M5	AB
Gebrochenrationale Funktion und Arkustangens	M6	AB

Differenzierung

Material	M1	M2	M3	M4	M5	M6
Niveau						

Kompetenzprofil:

Inhalt: Exponentialfunktion, Wurzelfunktion, Sinus, Arkussinus, Arkustangens, Integrieren, Substitutionsmethode, partielle Integration, Differenzieren, Stetigkeit, Kurvendiskussion, Skizzieren von Graphen, Grenzwerte, Asymptoten, Funktionenscharen, Stamm- und Integralfunktionen

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Funktionenschar mit Exponentialfunktionen

M1

1. Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = e^{\frac{x}{2}} + a \cdot e^{-\frac{x}{2}}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $D_a = \mathbb{R}$ mit den Graphen G_a .
- a) Zeigen Sie, dass je zwei Graphen aus der Schar keine gemeinsamen Punkte besitzen. [3 BE]
 - b) Bilden Sie die ersten beiden Ableitungen der Funktionen f_a und weisen Sie nach, dass $f_a''(x) = \frac{1}{4} \cdot f_a(x)$ ist. [5 BE]
 - c) Untersuchen Sie die Graphen G_a für $a \in \mathbb{R}^-$ auf Monotonie und bestimmen Sie für $a \in \mathbb{R}^+$ das Krümmungsverhalten der Graphen G_a . [4 BE]
2. Nullstellen und Extremwerte
- a) Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a entweder genau eine Nullstelle oder genau einen Extremwert besitzt. Berechnen Sie dann die möglichen Nullstellen und die möglichen Extremwerte nach Lage und Art in Abhängigkeit von a . Welche Bedeutung haben die Nullstellen der Graphen G_a ? [9 BE]
 - b) Bestimmen Sie die Gleichung $y = g(x)$ jener Kurve K , auf der alle Extremwerte liegen, wenn a alle möglichen Werte annimmt. Geben Sie auch die Definitionsmenge D_g der Funktion g an. [4 BE]
3. Betrachtet werden für $a_1 = 1$ und $a_2 = -1$ die Graphen G_1 und G_{-1} .
- a) Zeigen Sie, dass G_1 symmetrisch zur y -Achse und G_{-1} punktsymmetrisch zum Ursprung ist. [4 BE]
 - b) Zeichnen Sie die Graphen G_1 und G_{-1} im Intervall $I = [-4; 4]$ anhand einer Wertetabelle in ein rechtwinkliges Koordinatensystem. [6 BE]
 - c) Die Graphen G_1 , G_{-1} , die y -Achse und die Gerade $x = t$ ($t > 0$) schließen ein Flächenstück $A(t)$ ein. Bestimmen Sie $A(t)$ und dann $A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$. [5 BE]

Arbeitszeit: 50 Minuten

Gesamt: [40 BE]

M2 Sinusfunktion mit Wurzelterm

1. Gegeben ist eine Funktionenschar $f_a(x) = a \cdot \sin\sqrt{x}$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a auf das Intervall $I = [0; \pi^2]$.
 - a) Bestimmen Sie in I die Schnittpunkte der Graphen G_a mit der x -Achse sowie Art und Lage des Extrempunktes. Geben Sie einen Teilbereich von I an, in dem der Graph G_a einen Wendepunkt besitzen kann. Begründen Sie Ihre Überlegungen. (Die tatsächliche Berechnung eines Wendepunktes ist nicht erforderlich.) [10 BE]
 - b) Zeichnen Sie den zu $a = 4$ gehörenden Graphen G_4 im Intervall I anhand einer Wertetabelle. [5 BE]
2. Bestimmen Sie einen Bereich $I' \subseteq I$ so, dass die Funktion f_a in I' umkehrbar ist und geben Sie eine Gleichung von f_a^{-1} sowie deren Definitionsmenge $D_{f_a^{-1}}$ an. [8 BE]
3. Durch $F_a(x) = \int_0^x f_a(t) dt$, $x \in I'$ ist eine Integralfunktion zur Funktion f_a gegeben.
 - a) Begründen Sie ohne Berechnung des Integrals, dass die Funktion F_a streng monoton zunehmend ist. [1 BE]
 - b) Zeigen Sie, dass für alle $x_0 \in \left[0; \frac{\pi^2}{4}\right]$ gilt: $\frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot f_a(x_0) < F_a(x_0)$.
Hinweis: Überlegen Sie, was durch $\frac{1}{2} \cdot x_0 \cdot f_a(x_0)$ abgebildet wird und fertigen Sie eine Skizze an. [7 BE]
 - c) Bestimmen Sie dann die Funktion $F_a(x)$ durch Integration.
Hinweis: Integrieren Sie zuerst unbestimmt. Verwenden Sie eine Substitution und die partielle Integration.
Berechnen Sie dann damit die Fläche A , die der Graph G_a im Intervall I mit der x -Achse einschließt. [9 BE]

Arbeitszeit: 40 Minuten

Gesamt: [40 BE]