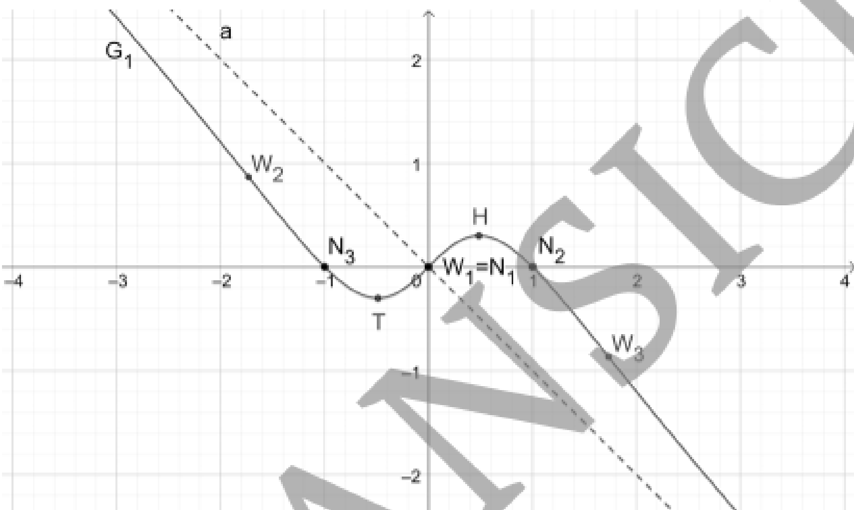
G.4.9

Rationale Funktionen und Exponentialfunktionen

Vermischte Übungen mit Funktionenscharen: Gebrochenrationale Funktionen, Exponentialfunktion und ein Kreis

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

In sechs umfangreichen Übungsaufgaben beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Funktionen und Funktionenscharen. Gebrochenrationale Funktionen kommen dabei ebenso vor wie Exponentialfunktionen. Auch ein Kreis bzw. Halbkreis wird in Form einer Wurzelfunktion näher in Augenschein genommen. Die Aufgaben drehen sich um die Bestimmung von Asymptoten, Extrem- und Wendestellen sowie um das Berechnen von Flächeninhalten und Volumen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe: 11/12/13

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz

Methoden: Übung, Diskussion

Thematische Bereiche: Gebrochenrationale Funktion, Exponentialfunktion, Wurzelfunktion, Kreisgleichung, Parabel, Wendepunkt, Hochpunkt, Tiefpunkt, Differenzialrechnung, Integralrechnung

Fachliche Hinweise

Die Jugendlichen sind in der Lage, verschiedene Funktionen zu differenzieren und zu integrieren und Kurvendiskussionen durchzuführen sowie Gleichungen zu lösen. Der Schwerpunkt der Aufgaben liegt dabei auf gebrochenrationalen Funktionen und Funktionenscharen, doch beschäftigen sich einzelne Aufgaben auch mit Wurzel- oder Exponentialfunktionen.

Auf einen Blick

Gebrochenrationale Funktionen, Exponentialfunktion und ein Kreis

M 1 Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen

einfaches Niveau	mittleres Niveau	schwieriges Niveau

Aufgaben

M 1

1. Flächen und Volumina

a) Gegeben ist die Funktion f durch die Zuordnung $y = f(x) = \sqrt{5x}$ mit Graphen G_5. Die Tangente im Kurvenpunkt $B(5|y_B)$ und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück A. Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

b) Jetzt ist die Funktionenschar f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = \sqrt{ax}, a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a festgelegt.
Im Kurvenpunkt $P(a|y_P)$ wird die Tangente t an den Graphen G_a gelegt. Geben Sie den Schnittpunkt dieser Tangenten mit der x-Achse in Abhängigkeit von a an.

c) Das vom Graphen G_a, der Tangente im Punkt P und der x-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse. Zeigen Sie: Die zur x-Achse senkrechte Ebene bei x = 0 zerschneidet den Rotationskörper in zwei volumengleiche Teilkörper.

d) Bestimmen Sie dann den Wert für a so, dass das Volumen des beschriebenen Rotationskörpers den Wert $V = 4{,}5\pi$ VE besitzt.

2. Gegeben ist die Funktion f durch ihre Gleichung $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 27x + 54}{6(x-2)}$ mit Graphen G_f und maximaler Definitionsmenge D_f.

a) Bestimmen Sie D_f sowie die Nullstellen und Asymptoten des Graphen G_f.

b) Berechnen Sie Koordinaten und Art der Extrempunkte und des Wendepunktes.

c) Zeichnen Sie den Graphen G_f anhand einer Wertetabelle im Bereich $I = [-8; 8]$.

d) Die Tangente t und die Normale n an der negativen Nullstelle N bilden mit der y-Achse ein Dreieck. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

3. Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = \frac{x^2 + a}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}^+$, Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und Graphen G_a.
   a) Zeichnen Sie den Graphen G_2 für a = 2 einschließlich seiner Asymptoten im Intervall $I =]-5; 5[$.
   b) Berechnen Sie den Inhalt $A(b)$ derjenigen Fläche, die der Graph G_2 zwischen x = 1 und x = b (b > 1) mit der x-Achse einschließt. Untersuchen Sie dann $\lim\limits_{b \to \infty} A(b)$.
   c) Die Tangente im Kurvenpunkt $P(2 | y_P)$ bildet zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Bestimmen Sie a so, dass dieses Dreieck extremalen Flächeninhalt besitzt. Welcher Art ist der Extremwert und wie groß ist dieser Flächeninhalt?

4. Gegeben ist die in $D = \mathbb{R}$ definierte Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = \frac{x - ax^3}{x^2 + 1}$ mit dem Graphen G_a.
   a) Berechnen Sie den Parameterwert a so, dass der zugehörige Graph an der Stelle x = 1 die Steigung m = 2 besitzt.
   b) Nun sei a = 1.
   Berechnen Sie für den Graphen G_1 die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und alle Asymptoten. Liegt eine Symmetrie vor? Geben Sie auch die Definitionsmenge für a = 1 an.
   c) Bestimmen Sie Art und Lage der Extremwerte sowie die Koordinaten der Wendepunkte.
   d) Zeichnen Sie den Graphen G_1 im Intervall $I = [-4; 4]$ (1 LE = 2 cm).
   e) Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte des Graphen G_1, die von der schiefen Asymptote den größten Abstand besitzen.

5. Gegeben ist ein Kreis $k: x^2 + y^2 = r^2$, der in den Punkten $A(0{,}5r | y_1)$ und $B(0{,}5r | -y_1)$ von einer Parabel mit der Gleichung $y = \pm c \cdot \sqrt{d - x}$ berührt wird.
   a) Bestimmen Sie die Parameter c und d in Abhängigkeit von r.
   b) Wenn die Kreisfläche und das von Parabel und Kreis begrenzte sichelförmige Gebiet um die x-Achse rotiert, entsteht ein eiförmiger Körper, dessen Volumen sich aus einem Kugelsegment und einem Rotationsparaboloid zusammensetzt.
   Berechnen Sie das Volumen des Kugelsegments und des Paraboloids.
   Welches Volumen hat so ein „Ei", wenn es 6 cm lang ist?