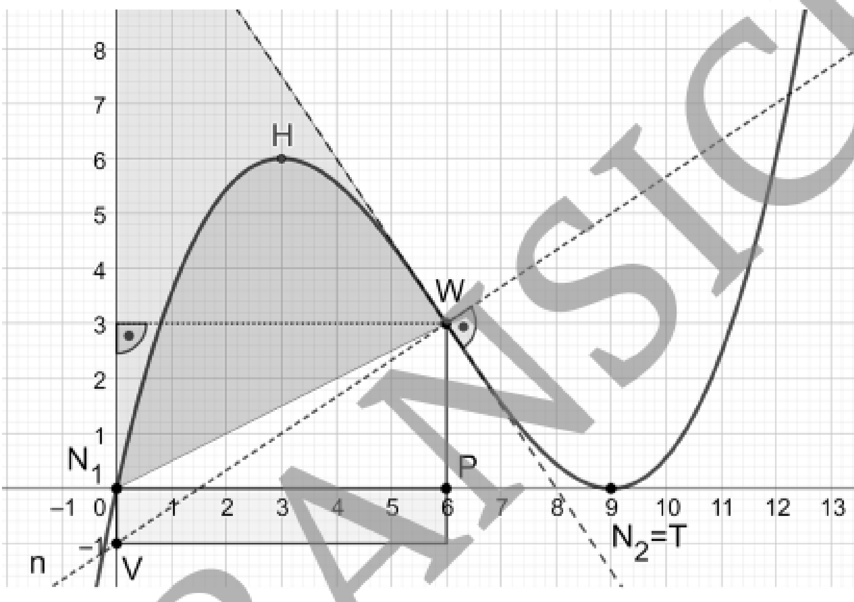
G.4.10

Rationale Funktionen und Exponentialfunktionen

Vermischte Übungen aus Analysis: Asymptoten, halbierte Flächen und Rotationskörper

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

In sechs umfangreichen Übungsaufgaben beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit verschiedenen Funktionen. Hauptsächlich arbeiten sie dabei mit rationalen Funktionen, jedoch kommen auch Wurzel- und Exponentialfunktionen vor. Die Jugendlichen führen Kurvendiskussionen durch und berechnen Flächeninhalte per Integralrechnung. Auch das Volumen von Rotationskörpern, wenn die Funktionsgraphen um die x-Achse rotieren, sind Inhalt der Aufgaben.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Übung, Diskussion
Thematische Bereiche:	Rationale Funktion, Exponentialfunktion, Wurzelfunktion, Kurvendiskussion, Integrieren, Differenzieren, Rotationskörper

Fachliche Hinweise

Die Jugendlichen sind in der Lage, verschiedene Funktionen zu differenzieren und zu integrieren und Kurvendiskussionen durchzuführen sowie Gleichungen zu lösen. Der Schwerpunkt der Aufgaben liegt dabei auf rationalen Funktionen, doch beschäftigen sich einzelne Aufgaben auch mit Wurzel- oder Exponentialfunktionen.

Auf einen Blick

Asymptoten, halbierte Flächen und ein Rotationskörper

M 1 Aufgaben

Erklärung zu den Symbolen

leichtes Niveau | mittleres Niveau | schwieriges Niveau

Aufgaben

M 1

1. Gegeben ist die Schar von Funktionen f_a durch ihre Gleichung $y = f_a(x) = ax + e^{-x} - 1$, $a \in \mathbb{R}^+$ und Graphen G_a.
   a) Zeichnen Sie den Graphen G_1 für a = 1 einschließlich der Asymptote im Bereich $I = [-2; 4]$.
   b) Der Graph G_1, die x-Achse und die schiefe Asymptote begrenzen im 1. Quadranten eine unendlich ausgedehnte Fläche. Bestimmen Sie deren Inhalt.
   c) Berechnen Sie die Koordinaten des Extremwertes von f_a in Abhängigkeit von a sowie diejenige Kurve, auf der sich der Extremwert bewegt, wenn a alle zugelassenen Werte annimmt.

2. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = e^{-x^2}$ und Graphen G.
   a) Skizzieren Sie den Graphen G im Intervall $I = [0; 2]$ (1 LE = 6 cm).
   b) Ein Rechteck wird so zwischen der x-Achse und dem Graphen G eingefügt, dass sich zwei seiner Seiten auf den positiven Koordinatenachsen befinden und ein Eckpunkt auf dem Graphen G liegt. Wie groß ist der maximale Flächeninhalt dieses Rechtecks?
   c) Der Graph G kann durch den Graphen G_g einer Funktion g mit der Gleichung $y = g(x) = \dfrac{1}{1 + cx^2}$ angenähert werden. Bestimmen Sie die Konstante c so, dass der Graph G_g durch den Wendepunkt des Graphen G verläuft. Skizzieren Sie auch den Graphen G_g in das angelegte Koordinatensystem.

3. Gegeben sind die Funktionen mit den Gleichungen $y = f(x) = \sqrt{x} + 4$ und $y = g(x) = x^2 - \frac{7}{2}x + 4$ mit Graphen G_f und G_g.
   a) Zeigen Sie, dass die beiden Graphen zwei Schnittpunkte mit ganzzahligen Koordinaten besitzen, und skizzieren Sie beide Graphen.
   b) Die beiden Graphen schließen ein Flächenstück ein. Wie groß ist sein Inhalt?
   c) Eine Gerade h geht durch den Punkt $P(0|4)$. Berechnen Sie die Steigung von h so, dass h das obige Flächenstück halbiert.
   d) Das Flächenstück aus Teilaufgabe 1b) rotiert um die x-Achse und erzeugt einen Rotationskörper. Wie groß ist sein Volumen?

4. Gegeben ist die Funktionenschar f_p durch ihre Gleichung $y = f_p(x) = x^4 + 2x^3 - 2px + p$, $p \in \mathbb{R}$ und Graphen G_p.
   a) Zeigen Sie, dass alle Funktionen dieser Schar genau zwei Wendepunkte besitzen und geben Sie deren Koordinaten in Abhängigkeit von p an.
   b) Für welchen Parameterwert besitzen die beiden Wendepunkte den kleinsten gegenseitigen Abstand?
   c) Die Tangente im Wendepunkt W_2 mit der größeren x-Koordinate schneidet den Graphen G_p in einem weiteren Schnittpunkt S. Berechnen Sie den Inhalt der von dieser Wendetangente und dem Graphen eingeschlossenen Fläche.
   d) Nun sei p = 0: Skizzieren Sie den Graphen G_0.
   e) Der Graph G_0 und die x-Achse schließen ein Flächenstück ein. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn dieses Flächenstück um die x-Achse rotiert.

5. Gegeben ist die in $D = \mathbb{R}$ definierte Funktion f durch ihre Gleichung
   $y = f(x) = \frac{1}{18}x^3 - x^2 + \frac{9}{2}x$ mit Graphen G_f.
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte des Graphen G.
   b) Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $I =]-1; 12[$. Die y-Achse, die Wendetangente und die Verbindungsgerade des Wendepunktes mit dem Ursprung bilden ein Dreieck. Zeigen Sie, dass dieses Dreieck durch den Graphen G in zwei inhaltsgleiche Flächen zerlegt wird.
   c) Die Normale im Wendepunkt W schneidet die y-Achse im Punkt V. Die Parallele zur x-Achse durch V und die Parallele zur y-Achse durch W bilden mit den Koordinatenachsen ein Rechteck. Berechnen Sie den Umfang dieses Rechtecks.

6. Eine gebrochen rationale Funktion, definiert in $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist gegeben durch ihre Gleichung $y = f(x) = \frac{x^3 + 7x^2 - 36}{x^2}$ mit Graphen G.
   a) Bestimmen Sie Asymptoten, Nullstellen und Extremwerte und zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $I = [-6; 6]$ (1 LE = 0,5 cm).
   b) Weisen Sie nach, dass die beiden Kurvenäste überall konkav gekrümmt sind.
   c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen G und der x-Achse im 2. Quadranten eingeschlossen wird.
   d) Zwei Tangenten an den Graphen G gehen durch den Koordinatenursprung O. Geben Sie die Abszisse des Berührpunktes einer dieser Tangenten an.