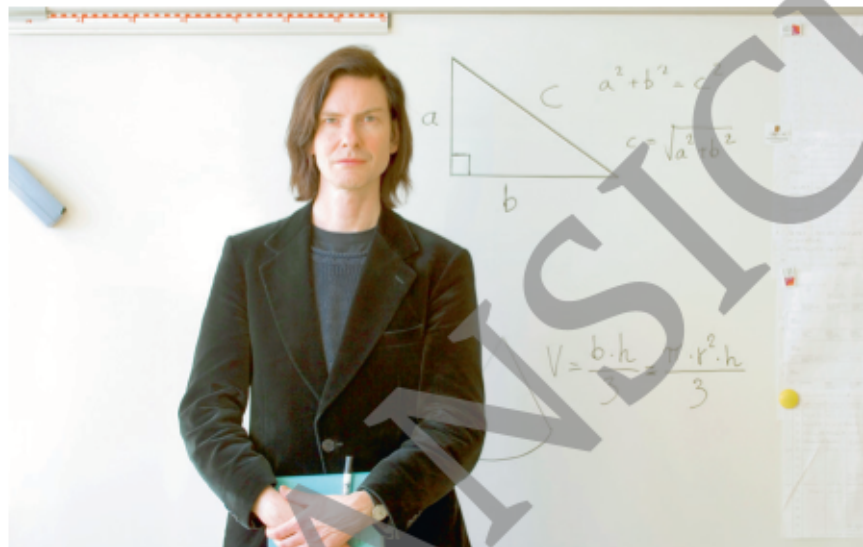


Aufgabensammlung Analytische Geometrie – Ebenen, Geraden und Körper

Alfred Müller



© Dag Sundberg/The Image Bank/ Getty Images Plus

Diese Aufgabensammlung liefert Ihnen und Ihren Schülerinnen und Schülern eine Vielzahl von Herausforderungen aus dem Bereich der Analytischen Geometrie. Die Lernenden beschäftigen sich mit der Lage von Geraden und Ebenen im Raum und untersuchen Würfel, Kugeln und Pyramiden. Auch die Berechnung von Flächen und Volumina, Abständen und Schnittpunkten sowie Schnittwinkeln kommt nicht zu kurz. Mit diesen Aufgaben wiederholen und festigen die Jugendlichen das Gelernte sowohl im Rahmen des Unterrichts als auch zu Hause.

Aufgabensammlung

Oberstufe (grundlegend/weiterführend)

Alfred Müller

Aufgaben	1
Lösungen	5

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

Zur Wiederholung des Stoffs aus dem Bereich der Analytischen Geometrie untersuchen die Schülerinnen und Schüler Geraden und Ebenen im Raum sowie Körper wie Kugeln, Pyramiden und Würfel. Sie stellen die Gleichungen von Geraden und Ebenen auf Basis verschiedener Nebenbedingungen auf und bestimmen Schnittpunkte, Schnittgeraden und Schnittflächen. Ihr räumliches Vorstellungsvermögen wird auf die Probe gestellt, indem sie sich beispielsweise überlegen, wie ein Würfel relativ zu zwei vorgegebenen Geraden liegen könnte, oder indem sie bestimmen, welchen „Schatten“ eine Gerade bei einer vorgegebenen Lichtquelle werfen würde. Abstands-, Flächen- und Volumenberechnungen runden den Inhalt dieser Aufgabensammlung ab.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Geraden	Aufg. 1–6	AB
Ebenen	Aufg. 1–6	AB
Würfel	Aufg. 1	AB
Kugel	Aufg. 3, 5	AB
Pyramide	Aufg. 2, 4, 6	AB
Projektion/Schattenwurf	Aufg. 1, 6	AB
Berührungspunkt	Aufg. 1, 2, 3, 5	AB
Volumen	Aufg. 2, 4, 6	AB
Schnittwinkel	Aufg. 2, 3, 5, 6	AB

© RAABE 2022

Kompetenzprofil:

Inhalt:

Punkte, Geraden, Ebenen, Normalenform, Parameterform, Schnittpunkt, Berührungspunkt, Schnittgerade, Schnittfläche, Schnittkreis, Koordinatenbestimmung, Würfel, Pyramide, Pyramidenschar, Kugel, Kugelgleichung, Schnittwinkel, Fläche, Volumen, Projektion, Schattenwurf, Hesse'sche Normalform

Medien:

GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen:

Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), Kommunizieren (K6)

Aufgaben

Aufgabe 1 – Würfel, Kugel und Geraden

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem sind die Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ die Kugel } K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} \right]^2 = 117 \text{ sowie}$$

die Punkte $A(5|-7|7)$ und $Z(-5|-12|-10)$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass die Richtungsvektoren von g und h normal aufeinander stehen, die Geraden selbst aber windschief zueinander sind.
- Weisen Sie nach, dass der Punkt A auf der Geraden h liegt. Bestimmen Sie dann eine Gleichung derjenigen Geraden k , die den Punkt A enthält und senkrecht zu den beiden Geraden g und h verläuft.
- Zeigen Sie, dass die Gerade k die Gerade g schneidet durch Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes P .
- Es gibt insgesamt neun Würfel, welche je zwei Eckpunkte auf den Geraden g und h besitzen. Beschreiben Sie die Lage dieser Würfel zu den Geraden g und h anhand von Skizzen und geben Sie ihre Kantenlängen an.



Hinweis: In dieser Aufgabe geht es nicht darum, konkrete Koordinaten der Eckpunkte des Würfels zu bestimmen. Überlegen Sie sich nur, wie die beiden Geraden entlang der Kanten oder der Seiten eines Würfels verlaufen könnten.

- Zeigen Sie, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt $P(-1|-1|4)$ berührt.
- Vom Punkt Z aus wird die Gerade g beleuchtet und wirft einen Schatten auf die Kugel K , welcher Teil eines Kreises k ist. Bestimmen Sie Mittelpunkt R und Radius ρ dieses Kreises.