Abstandsberechnungen im Raum – Zahlen im Wortgitter

Ein Beitrag von Günther Weber

© Günther Weber

Der Abstand zweier geometrischer Objekte ist die Länge der kürzesten Verbindungslinie zwischen den Objekten. Die kürzeste Verbindungslinie verläuft entlang der Lotgeraden von einem Objekt zum anderen. Mit den Mitteln der analytischen Geometrie bestimmen die Schülerinnen und Schüler die Abstände zwischen Punkten, zwischen Punkt und Gerade bzw. Punkt und Ebene sowie zwischen parallelen bzw. windschiefen Geraden und parallelen Ebenen. Sie wenden die Abstandsberechnung dann z. B. bei der Berechnung von Geschwindigkeiten oder bei der Bestimmung von Volumina an. Ihre Ergebnisse kontrollieren die Jugendlichen mithilfe eines Kreuzworträtsels oder eines Wortgitters.

Abstandsberechnungen im Raum – Zahlen im Wortgitter

Oberstufe (grundlegend)

Günther Weber

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

ihre bereits erworbenen Fähigkeiten in der analytischen Geometrie im räumlichen Koordinatensystem sicher anzuwenden. Die Lernenden untersuchen die Lagebeziehung von Geraden und Ebenen zueinander und bestimmen den Schnittpunkt zweier Geraden bzw. dreier Ebenen. Sie lösen Abstandsprobleme geometrischer Objekte mithilfe unterschiedlicher Methoden und berechnen den Flächeninhalt von Dreiecken sowie das Volumen von Pyramide und Kegel.
Die Aufgaben fördern eine Vielzahl der Kompetenzen, über die die Schülerinnen und Schüler in den Bereichen der Analytischen Geometrie vor dem Abitur verfügen sollten. Sie eignet sich daher auch gut zur Vorbereitung auf das Abitur

Hinweise

Lernvoraussetzungen

Die Lernenden kennen die Zwei-Punkte-Form bzw. Punkt-Richtungs-Form der Geradengleichung sowie die Normal-, Koordinaten- und Parameterform der Ebenengleichung. Die Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden bzw. dreier bereiten ihnen keine Probleme. Die Jugendlichen wissen, welche Eigenschaften bei der Lagebeziehung von Punkt und Gerade, von Geraden und Ebene bzw. von Ebene zu Ebene erfüllt sein müssen. Die Beziehung zwischen Rechtwinkligkeit zweier Vektoren und dem Skalarprodukt dieser Vektoren ist bekannt. Sie können mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstandsberechnungen (auch mit Parameter) durchführen sowie Flächeninhalte von Dreiecken und das Volumen von Pyramide oder Kegel bestimmen. Im günstigen Fall kennen Sie auch Spurpunkte und Spurgeraden.

Lehrplanbezug:

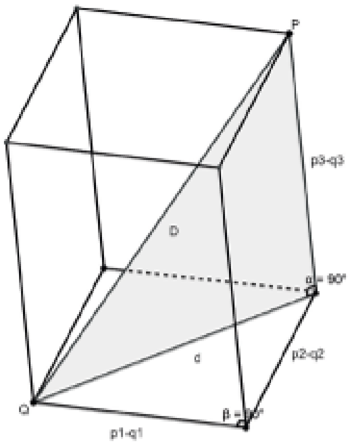
Im Kernlernplan des Landes Nordrhein-Westfalen
https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplan/47/KLP_GOSt_Mathematik.pdf
(aufgerufen am 09.11.2022) finden sich unter anderem folgende Kompetenzerwartungen, die der Beitrag gezielt fördert:

Die Schülerinnen und Schüler …

- stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar,
- stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar,
- untersuchen Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ebene bzw. zwischen zwei Ebenen,
- berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen,
- deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es,
- untersuchen mithilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Längenberechnung),
- stellen Ebenen in Normalenform dar,
- bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebene.

Informationen zur Abstandsberechnung M1

Abstand zweier Punkte



Gegeben sind die Punkte $P(p_1 | p_2 | p_3)$ und $Q(q_1 | q_2 | q_3)$. Der Abstand der Punkte P und Q kann aufgefasst werden als die Länge der Raumdiagonalen eines Quaders. Die Kanten des Quaders haben die Länge $|p_1 - q_1|$, $|p_2 - q_2|$ und $|p_3 - q_3|$ [LE].

Mit dem Satz des Pythagoras gilt nun

$d^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$ und

$$D^2 = d^2 + (p_3 - q_3)^2$$
$$= (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2$$

bzw. da D eine Länge ist

$$D = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

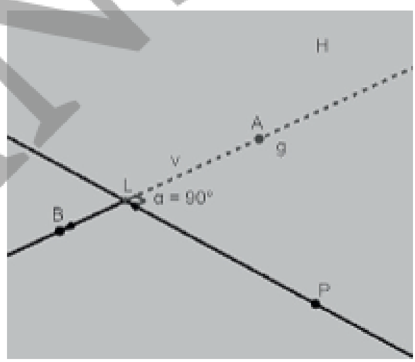
Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB}$ bzw. $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u}$ entspricht der Länge der Lotstrecke vom Punkt P zum Lotfußpunkt L, wobei L der Schnittpunkt des auf die Gerade gefällten Lotes mit der Geraden ist.

$d(P; g) = d(P; L) = |\overrightarrow{PL}|$

Hinweis zur Schreibweise: Der Ortsvektor eines Punktes wird im Beitrag mit seinem Kleinbuchstaben bezeichnet.

Beispiel: Punkt P hat den Ortsvektor $\vec{p}$.



Grafiken: Günther Weber

M2 Aufgaben zur Abstandsberechnung I

1. Abstand von Punkten
   a) Bestimmen Sie den Abstand der Punkte $A(-3|4|2)$ und $B(1|-4|1)$.
   b) Die Punkte $A(1|-2|3)$ und $B(-1|0|z), z < 3$ haben einen Abstand von $d = \frac{11}{3}$ LE. Ermitteln Sie die z-Koordinate des Punktes B.
   c) Bestimmen Sie den Abstand der Spurpunkte der Ebene $E: 9x + 12z = 12$.
   Tipp: Die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen sind die Spurpunkte der Ebene.
   d) Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $A(3|2|-5)$ vom Schnittpunkt der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Abstand von Geraden
   a) Ermitteln Sie den Abstand des Punktes $A(7|6|-7)$ von der Geraden mit der Gleichung

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   b) Gegeben sind die Punkte $A(5|-3|4)$, $B(5|5|12)$, $C\left(\frac{19}{3}\middle|\frac{13}{3}\middle|6\right)$ und $D\left(\frac{19}{3}\middle|3\middle|\frac{14}{3}\right)$.
   Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist, und berechnen Sie den Abstand der Grundseiten (parallelen Seiten).
   c) Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Punkt $Q(3|6|a)$.
   Bestimmen Sie die fehlende Koordinate a des Punktes Q so, dass der Abstand des Punktes Q von der Geraden g $4\sqrt{2}$ LE beträgt.