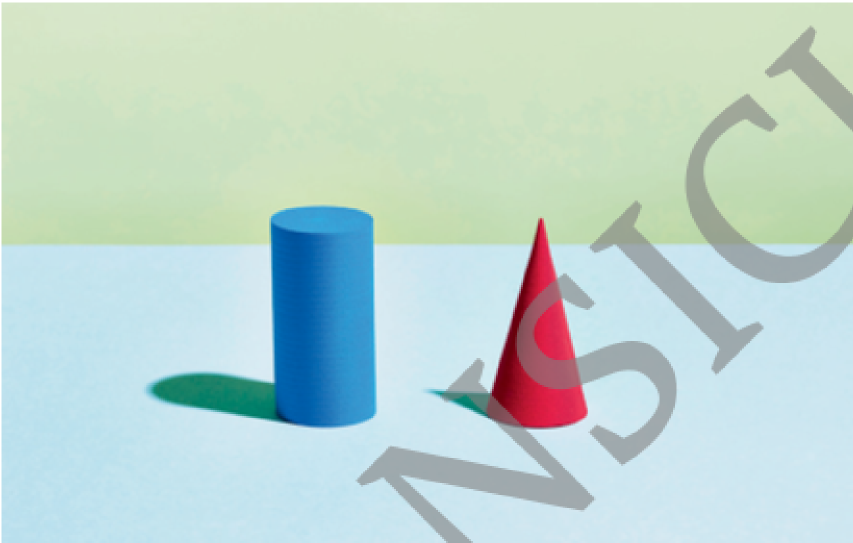
Kegel und Zylinder

Ein Beitrag von Alfred Müller



© Richard Drury / Photodisc / Getty Images Plus

Kegel und Zylinder sind Körper, die auf einem Kreis als Grundfläche beruhen. Während sich jedoch ein Kegel zu einer Spitze hin verjüngt, wird der Zylinder von einem weiteren Kreis als Deckfläche begrenzt.

In diesem Beitrag beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler mit diesen beiden Körpern und ihrer Lage im dreidimensionalen Raum. Sie finden heraus, ob sich gegebene Punkte innerhalb oder außerhalb eines Zylinders befinden oder bestimmen die Koordinaten der Spitze eines Kegels. Ferner ermitteln sie die Neigungswinkel von Mantelflächen und untersuchen das Verhalten eines Lichtstrahls, der an einem der Körper reflektiert wird.

RAABE, KLASSE SCHULE

Kegel und Zylinder

Oberstufe (grundlegend, weiterführend)

Ein Beitrag von Alfred Müller

Die Schülerinnen und Schüler lernen:

beim Arbeiten mit geometrischen Körpern in einem dreidimensionalen Koordinatensystem trainieren die Schülerinnen und Schüler ihr räumliches Vorstellungsvermögen. Sie trainieren den Umgang mit Geraden- und Ebenengleichungen und untersuchen die Lage von Punkten. Auch die Formeln für die Bestimmung eines Winkels zwischen zwei Vektoren werden wieder in Erinnerung gerufen.

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

AB Arbeitsblatt

einfaches Niveau   mittleres Niveau   schwieriges Niveau

Thema	Material	Methode
Gerader Kegel	M1, Aufgabe 1, 2, 4	AB
Schiefer Kegel	M1, Aufgabe 1	AB
Zylinder	M1, Aufgabe 2, 4	AB
Winkelbestimmung	M1, Aufgabe 1, 2, 3	AB
Kugel	M1, Aufgabe 2	AB
Oberfläche und Volumen	M1, Aufgabe 3	AB
Reflexion	M1, Aufgabe 4	AB

Kompetenzprofil:

Inhalt: Kegel, Zylinder, windschiefe Geraden, Abstände, Mantel, Oberfläche, Volumen, Winkel

Medien: GTR, CAS

Kompetenzen: Mathematisch argumentieren (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), Kommunizieren (K6)

Aufgaben M1

1. Der Grundkreis eines geraden Kreiskegels K_1 enthält die Punkte $A(5|1|2)$ und $B(-3|3|0)$. Die Länge einer Mantellinie des Kegels vom Punkt A zur Spitze S_1 beträgt $m = \left|\overrightarrow{S_1A}\right| = 3\sqrt{5}\,LE$ Der Mittelpunkt M des Grundkreises liegt auf der Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M des Grundkreises.
   b) In welcher Ebene E_1 liegt der Grundkreis des Kegels? Geben Sie E_1 in Normalenform an.
   c) Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze S_1 des Kegels. Gibt es dafür mehr als eine Lösung?
   Unter welchem Winkel a ist eine Mantellinie gegenüber der Grundkreisebene E_1 geneigt?
   d) Ein schiefer Kreiskegel K_2, der den gleichen Grundkreis wie K_1 besitzt, hat das doppelte Volumen wie K_1. Berechnen Sie die Koordinate der Spitze S_2 des Kegels K_2, wenn diese auf der x_2-Achse liegen soll. Gibt es mehr als eine Lösung?

2. Gegeben sind die beiden Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Zeigen Sie, dass die Geraden g und h windschief sind und berechnen Sie deren Abstand.
   b) Geben Sie die Gleichung der kleinsten Kugel K an, die beide Geraden berührt. Wie lauten die beiden Berührungspunkte B_1 und B_2?
   c) Zwischen g und h liegt ein gerader Kreiszylinder Z, sodass B_1 und B_2 die Mittelpunkte der Grund- bzw. Deckfläche sind. Falls der Radius des Zylinders 3 LE beträgt, liegen dann die Punkte $U(1|3|1{,}5)$ und $V(-2|7|2)$ innerhalb oder außerhalb von Z?
   d) Sei h die Achse eines Kreiskegels K_2 mit der Spitze $S(5|3|7)$. Bestimmen Sie den Öffnungswinkel φ (d.h. den Winkel an der Spitze), wenn die Gerade g den Kegel K_2 berührt.