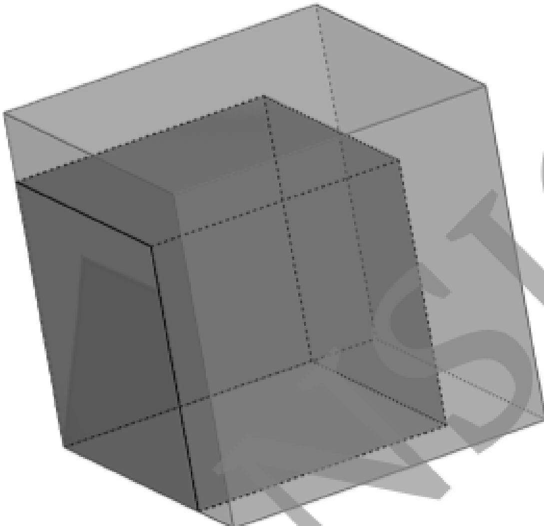
Das Delische Problem

Günther Weber



Grafik: Günther Weber

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Würfel einen Würfel mit dem doppelten Volumen mit Zirkel und Lineal (ohne Markierungen) zu konstruieren, gehört zu den klassischen Aufgaben der griechischen Antike und wird Delisches Problem genannt. Obwohl eine Konstruktion nicht möglich ist, kann die Kantenlänge des Würfels mit doppelten Volumen ausgehend von der Dreiteilung einer der Quadratseiten und den daraus resultierenden Rechtecken hergeleitet werden. Mithilfe von Spiegelungen von Eckpunkten der Rechtecke und den dazu gehörenden Funktionen ergibt sich für eine Quadratseite ein Teilverhältnis von $tv = \sqrt[3]{2}$, aus dem sich, übertragen in ein räumliches Koordinatensystem, ein Würfel mit doppeltem Volumen ergibt.

RAABE, KLASSE SCHULE

Überblick:

Legende der Abkürzungen:

Ab Arbeitsblatt

Thema	Material	Methode
Aufgaben	M1	Ab

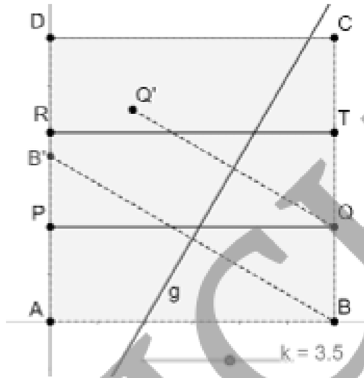
Kompetenzprofil:

Inhalt: Normalenvektor, Ebenengleichung (Parameterform, Koordinatenform, Abstand Punkt – Ebene, Geradengleichung, Mittelpunkt, senkrechte Geraden, Schnittpunkt von Gerade und Ebene, Abstand von Punkten, Spiegelung an Gerade bzw. Ebene

Medien: GTR/CAS, GeoGebra

Kompetenzen: Probleme mathematisch lösen (K2), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5)

Aufgaben: M1



Grafik: Günther Weber

1. Zwei Seiten eines Quadrates ABCD mit der Seitenlänge a = 6 cm liegen im 1. Quadranten auf den Koordinatenachsen. Zwei Parallelen $\overline{PQ}$ und $\overline{RT}$ zur Quadratseite $\overline{AB}$ teilen das Quadrat in 3 kongruente Rechtecke (siehe nebenstehende Abbildung).
   a) Legen Sie einen Punkt $B'(0\,|\,k)$, $0 \le k \le 6$ auf die Quadratseite $\overline{AD}$ und variieren Sie mithilfe eines Schiebereglers k (siehe Datei: **Deli_Bestimmung_k.ggb**) die Lage des Punktes B' so, dass bei Spiegelung an einer Geraden g der Punkt B auf B' und zugleich der Punkt Q auf die Parallele $\overline{RT}$ abgebildet wird, d. h. dass der Spiegelpunkt Q' von Q auf der Parallelen $\overline{RT}$ liegt.
   b) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Spiegelgerade g, so dass bei Spiegelung an der Geraden g der Punkt B auf B' und zugleich der Punkt Q auf die Parallele $\overline{RT}$ abgebildet wird.
   c) Bestimmen Sie das Streckenverhältnis $\overline{DB'} : \overline{AB'}$.
2. Bestimmen Sie die Gleichung der Spiegelgerade g aus Aufgabe 1b) mithilfe der Methoden der Analytischen Geometrie und geben Sie die Koordinaten der Spiegelpunkte B' und Q' an.
3. Es ist $A(-1\,|\,3\,|\,-2)$, $B(3\,|\,-1\,|\,0)$ und $D(1\,|\,7\,|\,2)$.
   a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD rechtwinklig gleichschenklig ist.
   b) Ergänzen Sie das Dreieck ABD zu einem Quadrat ABCD.
   c) Bestimmen Sie rechnerisch die Gleichung der Ebene, die durch die Punkte A, B und D festgelegt ist, in Koordinatenform.
   d) Die Punkte P und R liegen auf der Quadratseite $\overline{AD}$, die Punkte Q und T auf der Quadratseite $\overline{BC}$, wobei der Punkt Q näher bei B liegt als der Punkt T. Bestimmen Sie die Gleichung zweier Parallelen $\overline{PQ}$ und $\overline{RT}$ zur Quadratseite $\overline{AB}$, die das Quadrat in 3 kongruente Rechtecke aufteilen .

Alternativ: Bestimmung des Schnittpunktes der Spiegelgeraden mit der Geraden $g_{QQ'}$.
Setzt man die Funktionsterme der Spiegelgeraden und der Geraden $g_{QQ'}$ gleich und löst die entstehende Gleichung, so erhält man als Schnittstelle $x = \frac{3\cdot\left(k^2+4k+36\right)}{k^2+36}$.

$$\text{solve}(g\_ggs(x)=g(x),x) \qquad x=\frac{3\cdot\left(k^2+4\cdot k+36\right)}{k^2+36}$$

$$\text{solve}\left(g\_ggs\left(\frac{3\cdot\left(k^2+4\cdot k+36\right)}{k^2+36}\right)=3,k\right) \qquad k=\frac{6}{2^{\frac{1}{3}}+1}$$

Der Schnittpunkt ist gleich dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{QQ'}$, der Funktionswert an der Schnittstelle somit gleich 3. Gleichsetzen des Funktionswertes mit 3 und Lösen der Gleichung mit dem GTR/CAS nach k ergibt als Lösung

$$k=\frac{6}{2^{\frac{1}{3}}+1} \qquad k=2.65496$$

$$k=\frac{6}{2^{\frac{1}{3}}+1}\approx 2{,}655$$

c) Der Punkt B' teilt die 6 cm lange Quadratseite $\overline{AD}$ in eine Teilstrecke von 2,655 cm und eine Teilstrecke von 6 cm – 2,655 cm = 3,345 cm.
Das Verhältnis der Teilstrecken ist $\frac{3{,}345}{2{,}655}\approx 1{,}260$ bzw. mit den ungerundeten Zahlen $2^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{6-\frac{6}{2^{\frac{1}{3}}+1}}{\frac{6}{2^{\frac{1}{3}}+1}} \qquad 2^{\frac{1}{3}}$$