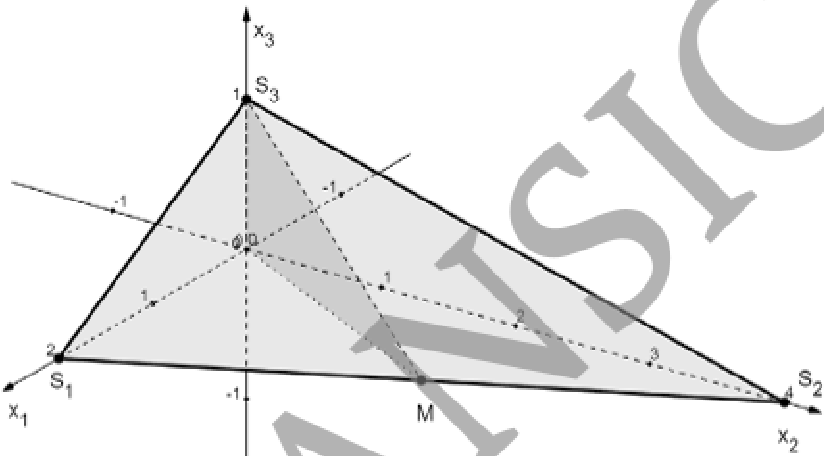
Tests und Klausuren – Tests

Pyramiden und Kugeln, Ebenen und Geraden – Übungstests aus analytischer Geometrie

Alfred Müller



Grafik: Günter Gerstbrein

Vektorräume, Pyramiden, Kugeln. Das und mehr ist der Inhalt von sechs Übungstests aus analytischer Geometrie, mit denen Sie Ihre Schülerinnen und Schüler auf das schriftliche Abitur vorbereiten. Alternativ können Sie den Jugendlichen die Übungsblätter aber auch zum Selbststudium und zur Selbstkontrolle zur Verfügung stellen. Ein Bewertungsschlüssel sowie Zeitvorgaben für jeden Test sorgen dabei für realistische Prüfungsbedingungen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Abiturvorbereitung, Analyse, Computer- und Softwareeinsatz, Übungen
Thematische Bereiche:	Prüfungsvorbereitung, Übungstest, Vektor, Vektorraum, Basiswechsel, Pyramide, Kugel, Geraden, Geradenschar, Ebenen, Projektion

Fachliche Hinweise

Die Jugendlichen verfügen über räumliches Vorstellungsvermögen und können mit Punkten, Geraden und Ebenen im Raum umgehen. Ferner ist ihnen der Begriff des Vektorraums geläufig und sie können Flächen und Volumina von Kugel und Pyramide berechnen.

Auf einen Blick

Übungstests aus analytischer Geometrie

M 1	Vektorraum, Basiswechsel, Ebenen, Schnittgeraden
M 2	Dreieck, Viereck und quadratische Pyramide
M 3	Dreiseitige Pyramide, Geraden und Geradenbüschel
M 4	Dreiseitige Pyramide und Schattenwurf
M 5	Pyramide, Kreis und Kugel
M 6	Geraden, Ebene und Kugel

Erklärung zu den Symbolen

einfaches Niveau — mittleres Niveau — schwieriges Niveau

Vektorraum, Basiswechsel, Ebenen und Schnittgeraden

M 1

1. In einem Vektorraum mit der Standardbasis $B_0 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ sind die drei Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$

   a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linear abhängig sind, dass aber $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear sind. [5 BE]

   b) $B = \{\vec{a}, \vec{b}\}$ ist die Basis eines Vektorraumes der Dimension 2. Welche Koordinaten hat der Vektor $\vec{c}$ bezüglich dieser Basis? [3 BE]

2. Die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind die Ortsvektoren der Punkte A, B, C in einem Koordinatensystem mit dem Ursprung O.

   a) Bestimmen Sie je eine Gleichung der Geraden g = AB und h = OC und berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes S und die Größe des Schnittwinkels φ. [5 BE]

   b) Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C in Parameterform und in Normalenform. [4 BE]

   c) Zeigen Sie, dass der Punkt $D(1|-2a|a+1)$ mit $a \in \mathbb{R}$ für jeden Wert von a in der Ebene E liegt. [2 BE]

   d) Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $[AC]$. Für welchen Wert von a liegen die drei Punkte B, M und D auf einer Geraden? [3 BE]

   e) Der Punkt T sei der Teilpunkt der Strecke $[AC]$ mit dem Teilverhältnis $\tau = -\frac{1}{2}$. Berechnen Sie die Koordinaten von T und zeichnen Sie die gegenseitige Lage der drei Punkte A, C, T maßstäblich. [5 BE]

3. Gegeben ist ferner die Ebene $E': 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$.

   a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Ebene E′ mit den Koordinatenachsen. [2 BE]

   b) Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der Ebenen E und E′ sowie die Größe ihres spitzen Schnittwinkels ε. [5 BE]

4. Eine Ebene F enthält die Punkte A und B und ist parallel zur x_3-Achse.

   a) Welche Schnittgerade s′ besitzen die Ebenen E und F? [2 BE]

   b) Bestimmen Sie dann eine Gleichung der Ebene F in Normalenform. [4 BE]

Arbeitszeit: 50 Minuten **Gesamt:** [40 BE]

M 4 Dreiseitige Pyramide und Schattenwurf

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $P(3|1|3)$, $Q(0|2|4)$ und $R(3|2|2)$ sowie die Ebene $E_1: 2x_1 - x_2 - x_3 - 2 = 0$ gegeben.
   a) Zeigen Sie, dass die drei Punkte P, Q, R ein Dreieck PQR bilden und berechnen Sie dessen Innenwinkel sowie dessen Flächeninhalt. **[7 BE]**
   b) Die Punkte P, Q, R bestimmen eindeutig eine Ebene E_2. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_2 in Normalenform. **[4 BE]**
   c) Die Ebene E_2 schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten S_1, S_2 und S_3. Diese Punkte bilden zusammen mit dem Ursprung O eine Pyramide $S_1S_2S_3O$. Bestimmen Sie deren Volumen auf zwei verschiedene Arten sowie deren Oberfläche. **[6 BE]**
   d) Stellen Sie die Ebene E_2 in einem Koordinatensystem dar. Verwenden Sie dazu die unter Teilaufgabe 1c) berechneten Schnittpunkte S_1, S_2 und S_3. **[5 BE]**
   e) Die Ebenen E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden s unter dem Winkel φ. Berechnen Sie die Größe des (spitzen) Winkels φ und bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s. Welche besondere Lage besitzt die Gerade s im Koordinatensystem? **[5 BE]**
   f) Stellen Sie die Ebene E_1 mithilfe der Geraden s und dem Schnittpunkt T der Ebene E_1 mit der x_1-Achse im Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d) dar. **[3 BE]**
   g) Untersuchen Sie dann die Lagebeziehung der Geraden s zu folgender Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \sigma \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \sigma \in \mathbb{R}.$$ **[4 BE]**

2. Sonnenlicht fällt unter Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ auf die (massive) Pyramide $S_1S_2S_3O$.

   Berechnen Sie die Koordinaten des Schattenpunktes W der Pyramidenecke S_3 in der x_1x_2-Ebene. Zeichnen Sie dann das gesamte Schattengebiet in der x_1x_2-Ebene in der angelegten Zeichnung ein und berechnen Sie dessen Fläche A_S. **[6 BE]**

Arbeitszeit: 40 Minuten **Gesamt: [40 BE]**