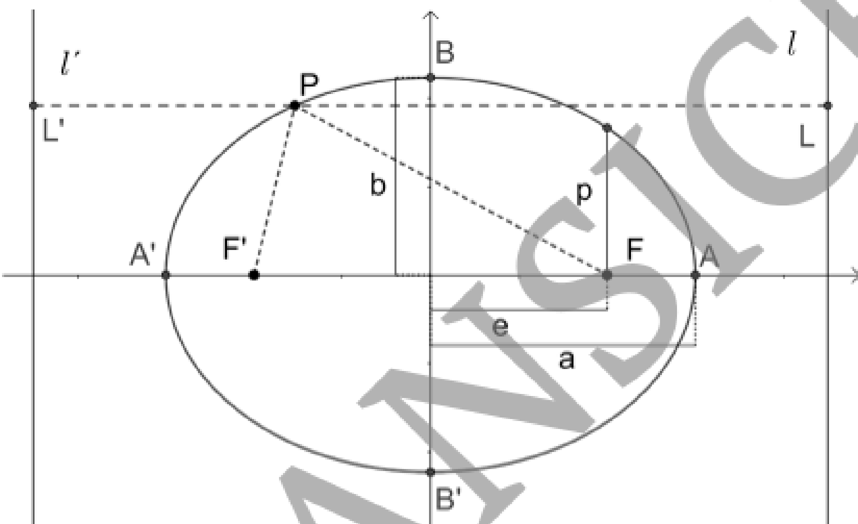
Ausgewählte Themen

Grundlagen der ebenen Geometrie – Geraden, Kreise, Kegelschnitte

Alfred Müller



Die Materialien behandeln die Grundlagen der ebenen Geometrie und eignen sich sowohl als Ergänzung zur Einführung in das Thema als auch zur Wiederholung.
Die Schülerinnen und Schüler lernen zweidimensionale Vektoren kennen und bilden damit Geraden in der Ebene. Es folgt eine Betrachtung von Kreisen. Dabei unterscheiden die Lernenden die verschiedenen Möglichkeiten, wie zwei Kreise zueinander liegen können, aber auch, wie eine Gerade zu einem Kreis liegen kann.
Schließlich betrachten die Jugendlichen auch die Kegelschnitte und ihre Gleichungen in der Ebene: die Ellipse, die Hyperbel und die Parabel.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	11/12/13
Kompetenzen:	Analysekompetenz, mathematisch argumentieren und beweisen, mathematische Darstellungen verwenden, mit mathematischen Objekten umgehen, Problemlösekompetenz
Methoden:	Abiturvorbereitung, Analyse, Auswertung, Übung
Thematische Bereiche:	Ebene Geometrie, Vektor, Gerade, Kegelschnitt, Kreis, Ellipse, Hyperbel, Parabel

Fachliche Hinweise

Die Lernenden sind mit dem kartesischen Koordinatensystem vertraut und können mit Vektoren rechnen. Auch Winkel- und Längenberechnungen sind ihnen bekannt.

Auf einen Blick

Grundlagen der ebenen Geometrie – Geraden, Kreise, Kegelschnitte

Thema:	Übergreifendes Thema nennen
M 1	Wiederholung
M 2	Geraden
M 3	Kreise
M 4	Kegelschnitte

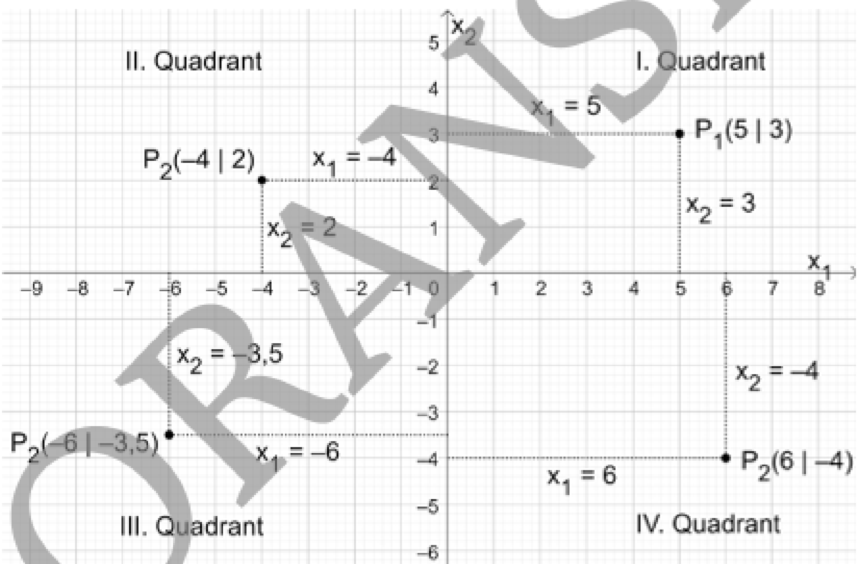
Wiederholung

M 1

Die Grundlage der ebenen Geometrie ist das Rechnen mit Vektoren in der zweidimensionalen Zahlenebene unter der Verwendung der Koordinatenschreibweise. Dabei werden die bisherigen Erkenntnisse aus der Mittelstufe in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt und Lagebeziehungen erkundet. Dazu kommen Längen- und Winkelmessungen mithilfe des Skalarprodukts, das auch zur Berechnung von Flächeninhalten verwendet werden kann.

Kartesisches Koordinatensystem

Das in der Zeichenebene verwendete Koordinatensystem hat zwei zueinander senkrechte Zahlengeraden, die sich im Ursprung O schneiden. Neben der früher üblichen Bezeichnung mit x- und y-Achse verwendet man in der analytischen Geometrie auch die Bezeichnung x_1- und x_2-Achse.
Zur Kennzeichnung von Punkten in der Ebene benötigt man zwei Koordinaten, z. B. $A(a_1 | a_2)$.
In der nachfolgenden Abbildung sind folgende Punkte dargestellt:
$P_1(5|3)$, $P_2(-4|2)$, $P_3(-6|-3{,}5)$ und $P_4(6|-4)$

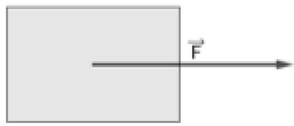


Grafik: Günter Gerstbrein

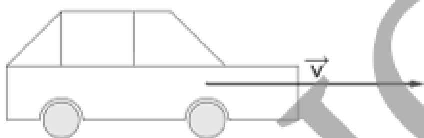
Vektoren in der Ebene E_2

Aus der Physik kennt man Größen, die nicht nur durch Maßzahl und Einheit, sondern auch durch ihre Richtung bestimmt sind.
Beispiele:

Eine Kraft F greift an einem Körper an.



Ein Auto fährt mit der Geschwindigkeit v.

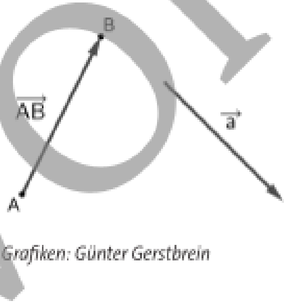


In einem Koordinatensystem werden nicht nur Punkte betrachtet, sondern auch Verbindungen untereinander. Zwischen zwei Punkten A und B unterscheidet man die Streckenlänge $\overline{AB}$ und den „Pfeil" $\overrightarrow{AB}$ mit dem Fußpunkt A und der Spitze B, d. h. $\overrightarrow{AB}$ besitzt eine Länge und eine Richtung. Man definiert:

Vektoren und Repräsentanten

Unter einem **Vektor** versteht man die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und parallelen Pfeile (= parallelgleichen Pfeile).
Ein einzelner Pfeil heißt **Repräsentant** dieses Vektors.

Da es umständlich ist, jedes Mal von einem Repräsentanten eines Vektors zu sprechen, verwendet man auch kurz die Bezeichnung „Vektor" für einen Repräsentanten.
Vektoren werden wie folgt geschrieben:
1. Mit kleinen Buchstaben, über denen Pfeile stehen: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$
2. Durch zwei Punkte der orientierten Strecke mit Pfeil darüber: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{XY}, \ldots$



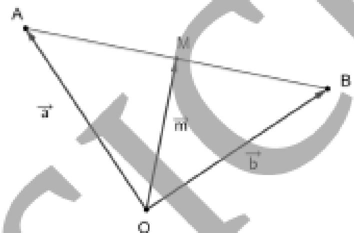
Grafiken: Günter Gerstbrein

Anmerkung:
Eine Menge V, deren Elemente Vektoren sind, heißt ein **reeller Vektorraum**, wenn es eine Vektoraddition mit den auf Seite 8 aufgelisteten Gesetzen (1) – (5) und eine S-Multiplikation mit Zahlen aus $\mathbb{R}$ und den auf Seite 10 angegebenen Gesetzen (1) – (4) gibt.

Der $\mathbb{R}^2$ bildet einen reellen Vektorraum mit der koordinatenweisen Addition und der S-Multiplikation. Er heißt auch **arithmetischer Vektorraum**.

Im $\mathbb{R}^2$ kann man folgende Formeln ableiten:

Mittelpunkt
Den Ortsvektor des **Mittelpunktes M** einer Strecke [AB] erhält man folgendermaßen:

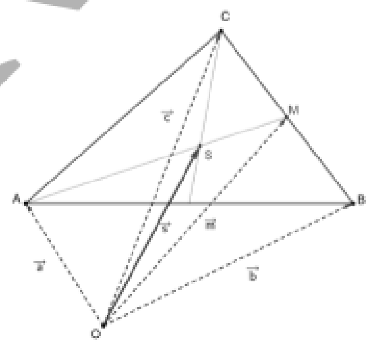


$$\overrightarrow{AM} = \vec{m} - \vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$$
$$\vec{m} - \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$
$$\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Den **Schwerpunkt S** eines Dreiecks ABC, den Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, wird wie folgt bestimmt:
Wenn A ein Eckpunkt und M der gegenüberliegende Seitenmittelpunkt ist, dann gilt mit den Sätzen der Mittelstufe:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM}$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AS} = \vec{a} + \frac{2}{3}\left(\vec{m} - \vec{a}\right)$$
$$= \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) - \vec{a}\right]$$
$$= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$
$$\Rightarrow \vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$



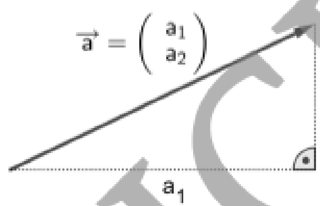
Grafik: Günter Gerstbrein

Längenmessung

Der Satz des Pythagoras hilft, die Länge eines Vektors bzw. die Länge einer Strecke zu bestimmen. Man definiert:

Unter dem **Betrag** $\left|\vec{a}\right|$ eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Länge des zum Vektor $\vec{a}$ gehörenden Pfeils. Wenn man $\vec{a}$ in der Koordinatenschreibweise angibt, so erhält man:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



Grafik: Günter Gerstbrein

Die **Länge** $\overline{AB}$ einer Strecke [AB] bestimmt man als die Länge des zugehörigen Vektors:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|$$

Beispiel:
Bestimmen Sie die Länge der Strecke [AB] mit A(1|–2) und B(5|2).

Lösung:

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{b} - \vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ LE}$$

Einheitsvektor
Ein Vektor mit dem Betrag 1 heißt Einheitsvektor. Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gibt es die beiden Einheitsvektoren $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \vec{a}$ bzw. $\vec{a}^{\,0} = -\frac{1}{\left|\vec{a}\right|} \cdot \vec{a}$

Beispiel:
Bestimmen Sie zum Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ die zugehörigen Einheitsvektoren.

Lösung:

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \Rightarrow \vec{a}^{\,0} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{a}^{\,0} = -\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$