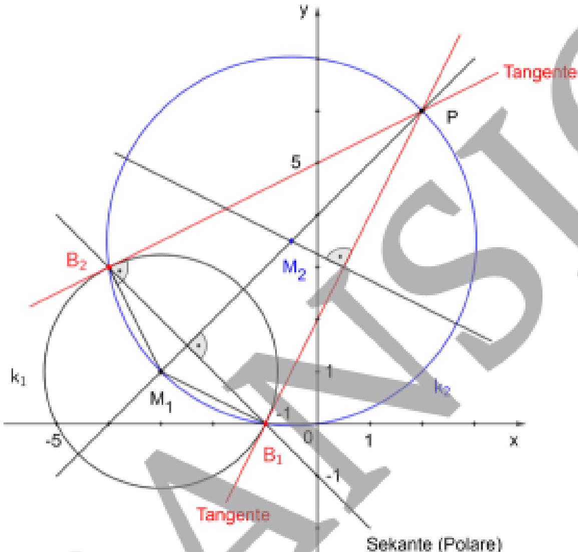
Krummlinige Figuren – Kreis und Kugel

Kreise und Tangenten – Konstruktive Bearbeitung und verschiedene Lösungswege

Wolfgang Lübbe



Dieses Material befasst sich mit dem Begriff der Tangente, in diesem Fall in Bezug auf Kreise. Dabei befassen sich die Lernenden mit der konstruktiven Bearbeitung und lernen verschiedene rechnerische Lösungswege kennen und nutzen die in der Mittelstufe erworbenen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten.

Die Aufgaben weisen unterschiedliches Niveau (leicht, mittel, schwer) auf. Der Schwierigkeitsgrad ist, der mathematischen Terminologie folgend, bis zu den Übungsaufgaben monoton steigend. Somit ist es möglich, bei der Aufgabenauswahl das Leistungsniveau der Jugendlichen zu berücksichtigen.

KOMPETENZPROFIL

Klassenstufe:	10/11/12/13
Dauer:	4 – 6
Kompetenzen:	Mathematisch argumentieren und beweisen (K1), Probleme mathematisch lösen (K2), mathematisch modellieren (K3), mathematische Darstellungen verwenden (K4), mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (K5), mathematisch kommunizieren (K6)
Methoden:	Analyse, Diagrammerstellung, Diskussion,
Materialart:	Arbeitsblatt, Definition, Textimpuls
Thematische Bereiche:	Kreis in Mittelpunktslage, Kreis in allgemeiner Lage, Geradengleichung, Anstieg, Tangente, Sekante, Sehne, Normale, Polare, Schnittpunkt, Schnittwinkel, Berührungsradius, Quadratische Ergänzung, Quadratische Gleichung, Lösungsverfahren für Gleichungssysteme, Strecke zwischen zwei Punkten, Mittelpunkt einer Strecke, Satz des Thales, Satz des Pythagoras, Trigonometrische Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck, Umfang eines Dreiecks, Flächeninhalt eines Dreiecks, Umkreis, Mittelsenkrechte, Innenwinkelsatz bei Dreieck und Viereck

Didaktisch-methodische Hinweise

Allgemeines

Im Mittelpunkt stehen Tangenten, die **in** einem Punkt bzw. **von** einem Punkt an den Kreis **in Mittelpunkts-** bzw. **in allgemeiner Lage** gelegt werden.
Auch exakte Konstruktionen liefern Ergebnisse, die in ihrer Genauigkeit den rechnerischen Lösungen nur wenig (gar nicht) nachstehen.
Dabei sind die konstruktiven Lösungen sehr anschaulich, auch ästhetisch und motivieren zu weiteren sauberen Darstellungen.
Unterschiedliche analytische Lösungswege ermöglichen, das gesamte bisher erworbene Wissen und Können einzubringen.

Einen positiven Effekt auf die Leistungsbereitschaft der Schülerinnen und Schüler hat, so glaube ich, die Wahl des Zahlenmaterials. In den Aufgabenstellungen, in den Lösungswegen, bei den Zwischen- und Endergebnissen treten oft ganzzahlige Werte, zumindest aber überschaubare Dezimal- bzw. gemeine Brüche auf, die relativ leicht zu bearbeiten sind.
Anstrengung, die zum Erfolg führt, lohnt sich. Erfolg motiviert jede Schülerin und jeden Schüler.

Niveau

Das Material **M 1** beginnt mit den Aufgaben 1 – 4 (niedriges Niveau), die auch von leistungsschwächeren Jugendlichen selbstständig zu lösen sind.
Einen mittleren Schwierigkeitsgrad haben die Aufgaben 5 – 10.
Die Aufgaben 11 – 15 (höheres Niveau) sollten von leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern bearbeitet werden.
Die Übungsaufgaben 1 – 5 im Material **M 3** haben unterschiedliches Niveau.

grundlegende Aufgaben	weiterführende Aufgaben
Aufgaben 1 bis 7 Übungsaufgaben 1 und 5	Aufgaben 8 bis 15 Übungsaufgaben 2; 3 und 4

Einsatz im Unterricht

Besonders wichtig erscheint es, die Lernenden explizit darauf hinzuweisen, dass es in dieser Problematik „Kreis und Tangente“ ähnliche, aber grundsätzlich unterschiedliche Aufgabenstellungen gibt.

Kreis in **Mittelpunktslage**	Kreis in **allgemeiner Lage**
Tangente **im** Punkt P auf dem Kreis	Tangenten an den Kreis **vom** Punkt P, der selbst nicht auf dem Kreis liegt

Jede dieser Varianten kann mit jeder anderen kombiniert werden, sodass dadurch prinzipiell vier verschiedene Aufgabenstellungen möglich sind.
Außerdem kann in einer Aufgabe mit zwei Kreisen die Lage der Kreise k_1 und k_2 gleich (beide in Mittelpunktslage oder beide in allgemeiner Lage) oder aber verschieden (einer in Mittelpunktslage, einer in allgemeiner Lage bzw. beide in unterschiedlicher allgemeiner Lage) sein. Dadurch wird die mögliche Aufgabenvielfalt nochmals erhöht. Die erste Anforderung an die Klasse besteht also darin, die Aufgabenstellung gründlich und aufmerksam zu lesen und dann richtig zu interpretieren.

M 1 Theorie zu „Kreis und Tangente“

Kreis und Tangente

Kreis: Mittelpunktslage: $x^2 + y^2 = r^2$; $M(0|0)$

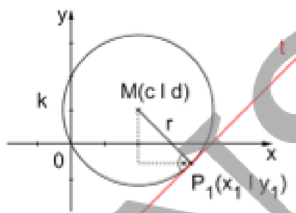
allgemeine Lage: $(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$; $M(c|d)$

Tangente in $P_1(x_1|y_1)$:

$M(0|0) \Rightarrow x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r^2$

$M(c|d) \Rightarrow (x-c)(x_1-c)+(y-d)(y_1-d)=r^2$

Anstieg der Tangente:



$$m_r = \frac{d-y_1}{c-x_1} = \frac{y_1-d}{x_1-c}$$

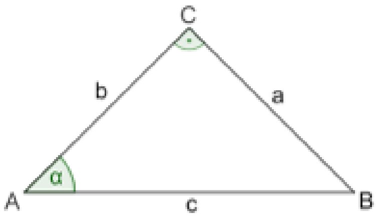
$$r \perp t \Rightarrow m_t = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_t = -\frac{1}{\frac{y_1-d}{x_1-c}}$$

$$m_t = -\frac{x_1-c}{y_1-d}$$

oder

$$(x-c)^2 + (y-d)^2 = r^2$$
$$2(x-c)\cdot 1 + 2(y-d)\cdot y' = 0$$
$$2(y-d)\cdot y' = -2(x-c)$$
$$(y-d)\cdot y' = -(x-c)$$
$$y' = -\frac{x_1-c}{y_1-d} = m_t$$

Trigonometrische Funktionen:



$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Allgemeines Dreieck:

Umfang: $u = a + b + c$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} g \cdot h$

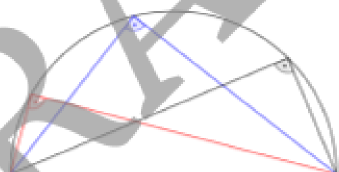
$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4r}$; r =Umkreisradius

Heronsche Formel:

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; $s = \frac{a+b+c}{2}$

Umkreis: Die Mittelsenkrechten schneiden einander im Umkreismittelpunkt.

Satz des Thales: Jeder Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises ist ein rechter Winkel.



Grafik: Wolfgang Lübbe

Innenwinkelsatz: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Allgemeines Viereck

Innenwinkelsatz: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

M 2 Aufgaben

1. Es ist die Gleichung der Tangente im Punkt $P_1(5|-3)$ des Kreises $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ zu bestimmen!

2. Ermittle jeweils die fehlende(n) Koordinate(n) des Punktes P_1 und die Gleichung der Tangente in diesem Punkt des Kreises!

   a) $x^2+y^2=169$; $P_1(-5|y_1>0)$

   b) $x^2+y^2-8x-12y+27=0$; $P_1(x_1|1)$

   c) $x^2+y^2-6x-8y=-8$; $P_1(7|y_1)$

   d) $5x^2+5y^2-9y-38=0$; $P_1\left(x_1<0 \;\middle|\; -\frac{3}{2}x_1\right)$

3. Berechne die Schnittpunkte und die Schnittwinkel des Kreises $(x-4)^2+(y-6)^2=100$ mit der x-Achse!

4. An den Kreis $x^2+y^2=100$ wird im Punkt $P_1(6|y_1>0)$ die Tangente gelegt. Welchen Winkel bildet diese Tangente mit der Geraden, die durch die Punkte $P_2(5|0)$ und $P_3(3|4)$ verläuft?

5. Gegeben sind der Kreis $x^2+y^2=10$ und die Gerade $6x+y=9$.
   Zu ermitteln sind:

   a) Koordinaten der Schnittpunkte $S_1;S_2$

   b) Gleichungen der Tangenten in $S_1;S_2$

   c) Schnittwinkel der Tangenten

6. Die Gerade $x-y-7=0$ schneidet den Kreis $x^2+y^2-20x+8y-53=0$ in zwei Punkten. An diese Punkte werden die Tangenten an den Kreis gelegt. Zu ermitteln sind der Winkel zwischen den Tangenten sowie ihr Schnittpunkt.

7. An den Kreis $x^2+y^2-8x-10y+21=0$ werden in den Punkten $P_1(6|y_1)$ und $P_2(6|y_2)$ die Tangenten gelegt. Wie weit ist der Schnittpunkt der Tangenten vom Mittelpunkt des Kreises entfernt?

8. Berechne den Schnittwinkel der beiden Kreise $x^2+y^2=16$ und $x^2+y^2-10x+16=0$!

9. Ermittle die Gleichungen der Tangenten, die vom Punkt $P(3|5)$ an den Kreis $(x+2)^2+y^2=5$ gelegt werden!